



# Mesure du tilt atmosphérique à partir de sa variation chromatique pour l'étoile laser polychromatique

Jérôme Vaillant

## ► To cite this version:

Jérôme Vaillant. Mesure du tilt atmosphérique à partir de sa variation chromatique pour l'étoile laser polychromatique. Optique [physics.optics]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2002. Français. NNT : . tel-01025615

**HAL Id: tel-01025615**

**<https://theses.hal.science/tel-01025615>**

Submitted on 18 Jul 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE  
présentée  
devant l'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1  
pour l'obtention du DIPLÔME DE DOCTORAT en ASTROPHYSIQUE  
(arrêté du 30 mars 1992)

Présentée et soutenue publiquement  
le 3 octobre 2002

par

**M. Jérôme VAILLANT**

**MESURE DU TILT ATMOSPHERIQUE  
À PARTIR DE SA VARIATION CHROMATIQUE  
POUR  
L'ÉTOILE LASER POLYCHROMATIQUE**

DIRECTEUR DE THÈSE : M. Christian Perrier

CO-DIRECTEUR DE THÈSE : M. Michel Tallon

JURY :

M. Claude Aime	Rapporteur
M. Jean-Marc Conan	Rapporteur
M. Simone Esposito	Examineur
M. Christian Perrier	Directeur de thèse
M. François Sibille	Président
M. Michel Tallon	Co-directeur de thèse



THÈSE  
présentée  
devant l'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1  
pour l'obtention du DIPLÔME DE DOCTORAT en ASTROPHYSIQUE  
(arrêté du 30 mars 1992)

Présentée et soutenue publiquement  
le 3 octobre 2002

par

**M. Jérôme VAILLANT**

**MESURE DU TILT ATMOSPHERIQUE  
À PARTIR DE SA VARIATION CHROMATIQUE  
POUR  
L'ÉTOILE LASER POLYCHROMATIQUE**

DIRECTEUR DE THÈSE : M. Christian Perrier

CO-DIRECTEUR DE THÈSE : M. Michel Tallon

JURY :

M. Claude Aime	Rapporteur
M. Jean-Marc Conan	Rapporteur
M. Simone Esposito	Examineur
M. Christian Perrier	Directeur de thèse
M. François Sibille	Président
M. Michel Tallon	Co-directeur de thèse



## UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1

Président de l'Université	M. le Professeur D. DEBOUZIE
Vice-Président Fédération Santé	M. le Professeur J. DOURY
Vice-Président Fédération Sciences	M. le Professeur R. GARRONE
Vice-Président du Conseil Scientifique	M. le Professeur J. RÉMILLIEUX
Vices-Présidents Recherche	MM. les Professeurs J. CHEVALEYRE et D. REVEL
Vice-Président Études Doctorales	M. le Professeur J.-F. MORNEX
Vice-Présidente du Conseil des Études et de la Vie Universitaire	Mme J. GALLEZOT Maître de Conférence
Secrétaire Général	M.J. BONTHOTAL

## FÉDÉRATION SANTÉ

UFR de Médecine Lyon R.T.H. Laënnec	Directeur : M. le Professeur VITAL-DURAND
UFR de Médecine Lyon Grange-Blanche	Directeur : M. le Professeur X. MARTIN
UFR de Médecine Lyon-Nord	Directeur : M. le Professeur F. MAUGUIÈRE
UFR de Médecine Lyon-Sud	Directeur : M. le Professeur F.N. GILLY
UFR d'Odontologie	Directeur : M. le Professeur J. DOURY
Institut des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques	Directeur : M. le Professeur F. LOCHER
Institut Techniques de Réadaptation	Directeur : Mme le Professeur D. BOISSON
Département de Formation et Centre de Recherche en Biologie Humaine	M. le Professeur J.F. MORNEX
Département de Formation à la Recherche et à l'Évaluation Pédagogique	M. le Professeur M. LAVILLE

## FÉDÉRATION SCIENCES

UFR de Physique	Directeur : M. le Professeur J.-L. VIALLE
UFR de Biologie	Directeur : M. le Professeur G. BOSQUET
UFR de Mécanique	Directeur : M. le Professeur H. BEN HADID
UFR de Génie Électrique et des Procédés	Directeur : M. le Professeur A. BRIGUET
UFR Sciences de la Terre	Directeur : M. le Professeur P. HANTZPERGUE
UFR de Mathématiques	Directeur : M. le Professeur Y. KERBRAT
UFR d'Informatique	Directeur : M. le Professeur M. EGEA
UFR de Chimie Biochimie	Directeur : M. le Professeur J.-P. SCHARFF
UFR STAPS	Directeur : M. P. THIRIET Maître de Conférences
Observatoire de Lyon	Directeur : M. le Professeur R. BACON
Institut des Sciences et techniques de l'Ingénieur de Lyon	Directeur : M. le Professeur J.P. PUAUX
Département de 1 <sup>er</sup> cycle Sciences	Directeur : M. J.C. DUPLAN
IUT A	Directeur : M. le Professeur M. ONDIN
IUT B	Directeur : M. le Professeur G. MAREST
Institut de Science Financière et d'Assurance	M. le Professeur D. SERANT



*à mon épouse et à mon fils...*

*Marie-Pierre et Antoine*





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Turbulence atmosphérique et surface d'onde.</b>	<b>7</b>
2.1	Physique de la turbulence atmosphérique . . . . .	8
2.2	Décomposition modale de la surface d'onde . . . . .	13
2.3	Un mode particulier : le tilt . . . . .	15
2.3.1	Définition . . . . .	15
2.3.2	Propriétés . . . . .	18
	Écart entre tilt et angle d'arrivée . . . . .	18
	Importance du tilt par rapport aux autres modes . . . . .	19
	Tilt et échelle externe . . . . .	20
<b>3</b>	<b>De l'optique adaptative à l'étoile laser polychromatique</b>	<b>23</b>
3.1	L'optique adaptative . . . . .	24
3.2	L'étoile laser . . . . .	27
3.2.1	Concept . . . . .	27
3.2.2	Effet de cône . . . . .	27
3.2.3	Problème du tilt . . . . .	31
	Solutions potentielles . . . . .	35
3.3	L'étoile laser polychromatique . . . . .	37
3.3.1	Principe . . . . .	37
3.3.2	Tilt différentiel . . . . .	38
	Propriété chromatique de l'indice de l'air . . . . .	39

Mesure du tilt à partir du tilt différentiel . . . . .	39
3.3.3 Génération des longueurs d'onde . . . . .	40
<b>4 Mesure du tilt différentiel</b>	<b>45</b>
4.1 Le projet ÉLP-OA : Étoile Laser Polychromatique pour l'Optique Adaptative .	46
4.2 Expérience MaTilD . . . . .	47
4.2.1 Domaine spectral . . . . .	47
4.2.2 Configuration de l'expérience . . . . .	50
Description de la source . . . . .	50
Description de l'instrument . . . . .	54
Description de l'acquisition . . . . .	58
4.3 Expériences et mesures . . . . .	60
4.3.1 Première version de l'expérience MaTilD . . . . .	60
4.3.2 Deuxième version de l'expérience MaTilD . . . . .	60
Disposition de l'expérience . . . . .	61
4.4 Protocole de mesure et pré-traitement des images . . . . .	63
4.4.1 Prétraitement des images . . . . .	63
4.4.2 Mode opératoire des mesures . . . . .	65
<b>5 Estimation des angles d'arrivée</b>	<b>69</b>
5.1 Estimation du rapport signal sur bruit . . . . .	70
5.1.1 Bruits et biais affectant la mesure du centre de gravité . . . . .	71
Effet du bruit de photons . . . . .	72
Effet de l'échantillonnage spatial . . . . .	74
Effet d'un bruit additif . . . . .	76
Effet de la correction imparfaite du DSNU et du PRNU . . . . .	79
5.1.2 Rapport signal sur bruit attendu . . . . .	81
5.1.3 Évolution du rapport signal sur bruit avec le temps de pose . . . . .	83
5.2 Mesures des angles d'arrivée sur les données MaTilD . . . . .	87
5.3 Simulations . . . . .	98

5.3.1	Modèles des images . . . . .	98
5.3.2	Comparaison avec les mesures . . . . .	100
5.4	Conclusion . . . . .	102
<b>6</b>	<b>Ajustement d'un modèle de phase</b>	<b>105</b>
6.1	Ajustement d'un modèle sur les données . . . . .	107
6.1.1	Notations . . . . .	107
6.1.2	Principe de l'ajustement d'un modèle . . . . .	108
6.2	Maximum de vraisemblance . . . . .	109
6.3	Les moindres carrés . . . . .	110
6.3.1	Les moindres carrés linéaires . . . . .	111
6.3.2	Recherche itérative du maximum de vraisemblance . . . . .	112
	Forme générale du problème . . . . .	112
	Approximation quadratique . . . . .	113
	Choix de la norme : $\ \delta \mathbf{p}\ $ . . . . .	114
	Remarques importantes . . . . .	115
6.3.3	Algorithme de Levenberg-Marquardt . . . . .	115
6.4	Optimisation dans un sous-espace de l'espace des paramètres . . . . .	117
6.5	Application aux images MaTilD : détermination du tilt . . . . .	119
6.5.1	Modèle des images . . . . .	120
6.5.2	Algorithme . . . . .	125
6.5.3	Gradient et matrice jacobienne . . . . .	127
6.5.4	Gradient . . . . .	127
6.5.5	Matrice jacobienne . . . . .	129
6.5.6	Résultats . . . . .	129
6.5.7	Lissage . . . . .	131
	Gradient . . . . .	132
	Matrice jacobienne . . . . .	133
	Résultats . . . . .	133
6.5.8	Conclusions . . . . .	134

<b>7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>137</b>
<b>8</b>	<b>Annexes</b>	<b>147</b>
8.1	Communication présentée au colloque SPIE « Astronomical Telescopes and Instrumentation 2000 » à Munich . . . . .	148
8.2	Article présenté au colloque SPIE « Astronomical Telescopes and Instrumentation 2000 » à Munich . . . . .	157
8.3	Article publié dans « Journal of Optical Society of America, 2000, Volume 17 »	170

# Chapitre 1

## Introduction

Depuis le XVII<sup>ème</sup> siècle et la première utilisation, par Galilée, d'un instrument optique pour l'observation astronomique, le diamètre des instruments n'a cessé d'augmenter. Cette recherche de télescopes et de lunettes de plus en plus grands a été dictée par le gain en flux collecté. En effet, celui-ci croît comme la surface du miroir primaire des télescopes. Plus cette surface sera grande, plus le nombre de photons collectés sera important (pour un temps de pose identique). Un plus grand télescope permet ainsi l'observation d'objets astronomiques plus faibles. Ce développement se poursuit encore à l'heure actuelle avec la mise en service des télescopes de 10 mètres de diamètre (tels que les télescopes VLT, Gemini, Keck, Subaru,...) et la planification de télescopes de plusieurs dizaines de mètres de diamètre, qualifiés de télescopes extrêmement larges : ELT. On pourra, par exemple, se reporter aux articles parus dans les proceedings SPIE : « Astronomical Telescopes and Instrumentation 2000 » sur les projets CELT et OWL (volumes 4003 et 4004).

Mais l'accroissement du diamètre du télescope devrait également se traduire par une augmentation du pouvoir de résolution angulaire qui traduit la capacité de tout système optique à discerner des structures fines. Il est inversement proportionnel à la taille de l'image que le système optique donne d'un point source. En effet plus cette image sera petite, plus il sera possible de discerner deux points proches. On dira alors que le système a une meilleure résolution. La théorie de la diffraction optique indique que la taille de la tache image est proportionnelle à

$\lambda/D^1$ , soit 10 millisecondes d'arc dans le visible pour un télescope de 10 mètres.

Cependant les télescopes au sol n'atteignent pas cette limite théorique, l'atmosphère terrestre brouille les images (voir figure 1.1), limitant ainsi la résolution à une seconde d'arc dans le visible (soit typiquement la résolution d'un télescope de 10cm de diamètre). La dégradation peut atteindre un facteur 100 (voir chapitre 2). Afin de s'approcher de la limite de diffraction, plusieurs solutions ont été proposées. On peut distinguer les méthodes *a posteriori* qui corrigent les effets de la turbulence une fois les images obtenues, et les méthodes *a priori* qui corrigent la turbulence avant la formation des images.

La principale méthode *a posteriori* est l'interférométrie des tavelures (ou *speckles*), proposée par Labeyrie en 1970[1]. Le principe consiste à acquérir de nombreuses images (typiquement plusieurs milliers) avec des temps de poses courts<sup>2</sup> (voir figure 1.1). Un traitement statistique de ces images permet d'atteindre la limite de diffraction. On s'affranchit ainsi des effets de la turbulence et des défauts du télescope. Cette méthode est cependant limitée aux objets relativement brillants de magnitude inférieure à 12[2], soit environ 10000 fois plus brillant que les objets les plus faibles détectables avec les grands télescopes. En effet, le traitement ne peut être effectué que pour des images quasi-monochromatiques (*i.e.*, filtrées en longueurs d'onde) de largeur spectrale inférieure à 10nm typiquement. Ceci réduit le nombre de photons collectés. En outre, le champ couvert par ces techniques reste limité au domaine d'isoplanétisme (voir chapitre 2.1) soit  $\approx 2 - 3 \text{ arcsec}$ .

Les méthodes *a priori* présentent l'avantage de corriger l'effet de la turbulence avant la formation des images. Elles sont donc plus sensibles car l'image délivrée est, à tout instant, proche de la limite de diffraction. De longs temps de poses sont alors possibles. De plus ces méthodes permettent d'utiliser tout le spectre et non pas seulement une bande étroite comme c'est le cas pour l'interférométrie des tavelures. Les deux principales méthodes de correction *a priori* sont :

- La mise en orbite du télescope : celui-ci est alors au dessus de l'atmosphère, la turbulence est donc totalement supprimée. C'est le cas du télescope spatial Hubble.

---

<sup>1</sup> $\lambda$  et  $D$  désignent respectivement la longueur d'onde et le diamètre du télescope

<sup>2</sup>On considère ici des temps de poses inférieurs au temps d'évolution de la turbulence, celle-ci est alors «figée» sur une image

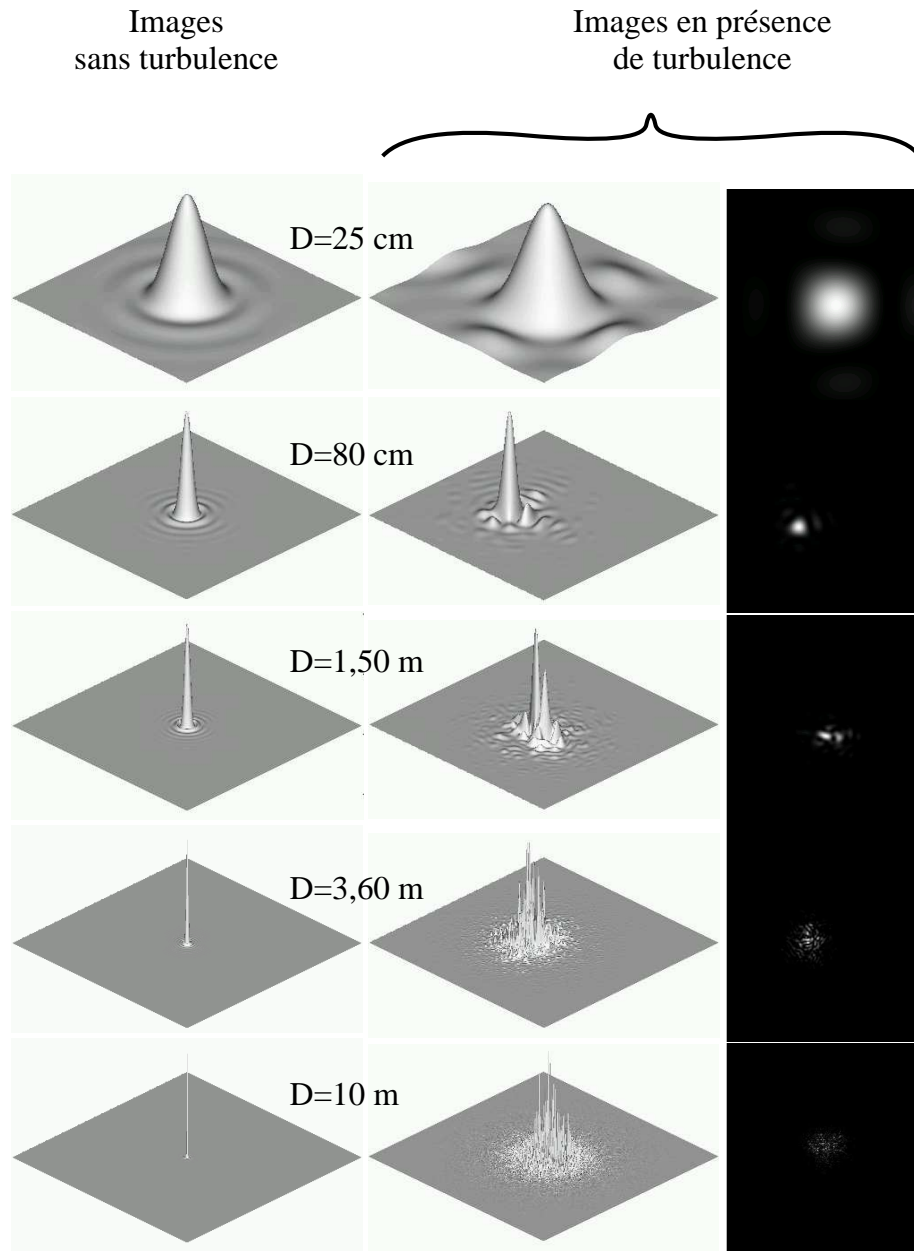


FIG. 1.1 – *Évolution des images, pour des courtes poses, au foyer d'un télescope dans le cas sans turbulence (images de gauche) et en présence de turbulence (images du milieu et de droite). Ces simulations ont été obtenues en considérant un très bon site astronomique avec une faible turbulence ( $r_0 = 25\text{cm}$ ) et pour des télescope de 25cm, 80cm, 1,50m, 3,60m et 10m de diamètres.*



- La correction en temps réel de la turbulence atmosphérique. C'est le principe de l'optique adaptative proposée par Babcock[3] (voir chapitre 3.1).

Les télescopes spatiaux présentent de grands avantages sur les télescopes au sol : tout le spectre électromagnétique est accessible, les observations sont sans contraintes météorologiques, la quasi totalité du ciel est accessible à tout instant. Mais le coût (2,2 milliards de dollars<sup>3</sup> pour le télescope Hubble contre typiquement 100 millions de dollars pour un télescope de 8 mètres au sol) et la difficile maintenance des instruments (une intervention nécessite la mise en place d'une mission spatiale habitée) limitent le nombre de télescopes de ce type. L'espace reste évidemment le seul endroit permettant l'observation des radiations qui sont absorbées par l'atmosphère terrestre telles que les rayons X et  $\gamma$  ou encore l'ultra-violet. À l'heure actuelle, seul le télescope spatial Hubble observe dans un domaine accessible aux télescopes au sol. Son successeur, le NGST (Next Generation Space Telescope), sera optimisé pour l'infrarouge où l'espace présente quelques avantages supplémentaires comme par exemple l'absence de rayonnement de fond de ciel dû à l'atmosphère.

L'optique adaptative est la solution la plus employée car elle permet, pour un coût moindre, de s'approcher de la limite de diffraction. Comme cette méthode corrige la turbulence atmosphérique avant la détection de l'image, il est possible de tirer le meilleur parti du gain en résolution en utilisant des instrument dédiés à l'optique adaptative (spectromètre, coronographe). Elle présente toutefois quelques limitations qui seront présentées plus en détails dans le chapitre 3.1. La limite fondamentale est la faible portion du ciel accessible par l'optique adaptative[4], notamment dans le visible. Comme nous le verrons dans au chapitre 3.1, il est en effet nécessaire d'avoir une source de référence brillante (dans l'infrarouge, de magnitude inférieure à<sup>4</sup>  $m_K = 15$ ) pour permettre l'analyse de la surface d'onde en temps réel. À ceci s'ajoute le fait que la correction de la turbulence atmosphérique n'est correcte que dans une portion réduite du ciel autour de la source à observer (quelques secondes d'arc dans le visible). Seule une très faible zone du ciel est donc accessible par l'optique adaptative. Pour pallier ce problème, Foy et Labeyrie[5] ont proposé de créer une étoile artificielle à l'aide d'un faisceau laser. On dispose ainsi d'une source de référence pour l'optique adaptative qui peut être placée en tous points de la

---

<sup>3</sup>d'après le STSCI (<http://hubble.stsci.edu/>)

<sup>4</sup>source : Université d'Hawaii <http://www.ifa.hawaii.edu/ao/>

voûte céleste (voir chapitre 3.2). L'étoile laser a été développée dans plusieurs observatoires (expérience ALFA du Max-Planck-Institut, Observatoire de Lick, Starfire optical Range, ...). Mais l'emploi d'une seule étoile laser ne permet pas de couvrir tout le ciel. En effet, l'étoile laser permet de mesurer la déformation de l'image due à l'atmosphère, mais pas son déplacement. On obtient alors une image très piquée, mais qui se déplace sous l'effet de la turbulence. Cet effet est connu sous le terme de «problème du tilt<sup>5</sup>» (voir chapitre 3.2.3). Plusieurs solutions ont été proposées pour le résoudre et seront détaillées au chapitre 3.2.3. L'une d'entre elles est l'étoile laser polychromatique, proposée par Foy *et al.*[6]. Elle présente l'avantage de déterminer le tilt sans aucune référence extérieure. Le déplacement de l'image est déduit du déplacement de l'étoile laser, mesuré à deux longueurs d'onde différentes. Ceci est détaillé au chapitre 3.3. Au problème du tilt s'ajoute le problème de l'effet de cône, présenté au chapitre 3.2.2 : l'altitude finie de l'étoile laser ne permet pas de mesurer toute la turbulence vue par le télescope.

Comme son nom le suggère son nom, l'étoile laser polychromatique est donc basée sur la mesure chromatique du tilt et la connaissance de la loi de variation de l'indice de l'air avec la longueur d'onde. Le chromatisme de l'air est, à juste titre, négligé en optique adaptative car de très faible effet. La mesure différentielle théoriquement valide peut se révéler difficile dans la pratique, de par la précision requise. Quelques discussions (notamment avec le groupe de R. Angel) et l'absence de références bibliographiques sur le sujet montrent que cette mesure est particulièrement délicate et n'a jamais été effectuée avec succès à ma connaissance. Je me suis donc employé, au travers de l'expérience MaTilD- **M**anipulation de **T**ilt **D**ifférentiel (voir chapitre 4) - à démontrer expérimentalement la faisabilité de cette mesure. Les deux chapitres suivants 5 et 6 décrivent les deux traitements de données que j'ai développés afin d'obtenir la meilleure précision possible sur la mesure du tilt. Le premier traitement est basé sur la mesure du centre de gravité de l'image, technique largement utilisée en optique adaptative, notamment dans les analyseurs de fronts d'onde. Bien que sa précision soit modérée, il m'a permis d'exhiber pour la première fois le chromatisme du tilt. Le second est dérivé des méthodes d'ajustement de modèle et de diversité de phase. Il utilise au mieux l'information contenue dans l'image. La précision de mesure doit donc être supérieure. Il n'a toutefois pas pu être mise en œuvre sur

---

<sup>5</sup>le tilt est la pente de la surface d'onde : il se traduit dans le plan image par un déplacement de l'image

les données de l'expérience faute de temps. Je conclus cette étude au chapitre 7 en comparant les résultats des deux traitements vis à vis de la mesure en temps réel du tilt différentiel dans le cadre d'une étoile laser polychromatique pour l'optique adaptative.

## Chapitre 2

# Turbulence atmosphérique et surface d'onde.

Lorsque l'on observe un objet astronomique depuis le sol son image apparaît déformée de façon aléatoire. Il est alors impossible de voir les détails les plus fins. La situation est similaire à celle d'une personne au bord de l'eau qui veut observer un objet au fond lorsque la surface est agitée : elle est capable de voir si l'objet s'y trouve mais il lui est impossible d'en voir les détails. Les phénomènes sont en effet assez semblables : dans un cas il s'agit du dioptré air-eau qui est déformé aléatoirement par les vagues, dans l'autre c'est le milieu atmosphérique qui présente des fluctuations d'indice, mais le résultat est le même : une déformation de la surface d'onde et donc des images.

Les marins ont l'habitude d'utiliser une «lunette de calfat<sup>1</sup>» pour voir sous la surface de l'eau en supprimant les vagues. Malheureusement pour les astronomes, il n'est pas possible de supprimer la turbulence atmosphérique depuis le sol ; elle est répartie sur environ  $20km$  d'altitude. L'optique adaptative a donc été développée pour corriger en temps réel la turbulence. Pour que cette correction soit adéquate, il faut connaître les propriétés de la turbulence atmosphérique, son lien avec l'indice de l'air et enfin l'effet de ces variations de l'indice sur la surface d'onde.

Je vais donc m'intéresser tout d'abord à la physique de la turbulence atmosphérique. Ceci me permettra de dériver les propriétés statistiques utiles dans le cadre de l'expérience MaTILD. Puis

---

<sup>1</sup>tube bouché à une extrémité par une vitre

je m'attarderai sur la décomposition modale de la surface d'onde (perturbée par la turbulence atmosphérique) et plus particulièrement sur le mode tilt que je définirai précisément et dont j'examinerai plus en détail les caractéristiques.

## 2.1 Physique de la turbulence atmosphérique

La nature turbulente et chaotique de l'atmosphère terrestre ne permet de décrire ses variations que de façon statistique. La turbulence atmosphérique est tout d'abord une variation aléatoire de température et présente l'avantage d'être pleinement développée, c'est à dire présente à toutes les échelles, à la différence par exemple de la convection qui présente une échelle caractéristique qui est la taille du tourbillon.

Le caractère pleinement développée de la turbulence permet de la décrire par le théorie de la «cascade radiative» de Kolmogorov. Ce mathématicien russe s'est basé, en 1941, sur une proposition de Richardson datant de 1922 formulée dans le paragraphe suivant[7] :

*Les gros tourbillons ont de petits tourbillons,  
Qui se nourrissent de leur vitesse,  
Et les petits tourbillons en ont de plus petits,  
Et c'est ainsi jusqu'à la viscosité.*

Ceci correspond à une description «fractale» de la turbulence et signifie que l'énergie turbulente est distribuée à toutes les échelles par un phénomène de cascade. En d'autres termes : à une échelle particulière (le diamètre du tourbillon), le tourbillon :

- reçoit une fraction d'énergie cinétique des tourbillons de tailles supérieures.
- dissipe une partie de son énergie vers les tourbillons de tailles caractéristiques inférieures.

Le taux de perte d'énergie  $\epsilon_r$ , pour un tourbillon de taille  $r$ , s'écrit comme étant la fraction  $a$  ( $a < 1$ ), de l'énergie cinétique de celui-ci, transférée par unité de «temps caractéristique»  $T_r^2$ . Cela peut alors s'écrire :

$$\epsilon_r = \frac{1}{2} a \frac{v_r^2}{T_r} \approx \frac{v_r^3}{r} \quad (2.1)$$

---

<sup>2</sup> $T_r = r/v_r$  où  $v_r$  désigne la différence de vitesse typique à l'intérieur du tourbillon

L'hypothèse de Kolmogorov est de poser  $\varepsilon_r$  indépendant du rayon du tourbillon. Cette hypothèse empirique s'est révélée très bien décrire la réalité de la turbulence pleinement développée, avec  $a \approx 1$ . Sous cette hypothèse et à partir de l'équation (2.1), la fonction de structure des vitesses au sein du tourbillon est alors indépendante de  $r$  et s'écrit :

$$D_v(\rho) = \left\langle |v(r+\rho) - v(r)|^2 \right\rangle = v_\rho^2 = (\varepsilon \rho)^{2/3} \quad (2.2)$$

De cette fonction de structure et par une analyse dimensionnelle, on montre que la composante  $\Phi(k)$  du spectre d'énergie (densité d'énergie turbulente dans le mode  $k = 2\pi/r$ ) est proportionnelle à [7, 8] :

$$\begin{cases} \Phi(k) \propto k^{-5/3} & \text{à 1 dimension} \\ \Phi(\mathbf{k}) \propto k^{-11/3} & \text{à 3 dimensions (dans le cas isotropique)} \end{cases} \quad (2.3)$$

Cette description fractale de la turbulence n'est bien sûr pas valide quelle que soit l'échelle considérée. Elle possède deux bornes :

- l'échelle interne  $\ell_0$  qui est l'échelle à laquelle la viscosité  $\nu$  de l'air entre en jeu, comme le mentionne Richardson dans sa proposition. Elle peut être estimée en considérant que la viscosité intervient lorsque le nombre de Reynolds est proche de l'unité. Ce nombre de Reynolds est défini par :  $R_r = r v_r / \nu = \varepsilon^{1/3} r^{4/3} / \nu$ . Il quantifie le potentiel turbulent d'un écoulement : les écoulements à fort nombre de Reynolds développent rapidement un caractère turbulent. Inversement si le nombre de Reynolds est petit l'écoulement sera laminaire. Étant données les caractéristiques de l'atmosphère, l'échelle interne  $\ell_0 = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$  est de l'ordre du millimètre.
- l'échelle externe  $\mathcal{L}_0$  ; elle n'est pas mentionnée par Richardson, mais elle est définie par la taille du plus gros tourbillon. Pour l'atmosphère, elle correspond à l'épaisseur de la couche turbulente. Elle est de l'ordre de 20 mètres comme le montre les études faites par l'équipe du GSM (Great Scale Monitoring)[9, 10, 11].

La représentation de la turbulence par le spectre de Kolmogorov suppose implicitement que l'on est dans le «domaine inertiel», c'est à dire que les échelles  $\ell$  considérées vérifient :  $\ell_0 \ll \ell \ll \mathcal{L}_0$ .

Disposant d'une description de la turbulence, il nous reste à voir comment les variations de l'indice de l'air sont liées à la turbulence. Ce lien est explicité par Roddier[8] : « Obukhov

et Yaglom ont montré [en 1949] que dans le cas d'un écoulement turbulent, la concentration d'une quantité passive (*i.e.*, n'affectant pas la dynamique de la turbulence) et conservatrice (*i.e.*, ne disparaissant pas par réaction chimique), suit également la loi de Kolmogorov ». C'est le cas en particulier de la température, de la pression et de la concentration d'humidité dont les spectres de puissance vont être de la forme :  $k^{-11/3}$ . Or l'indice de réfraction de l'air est une fonction de la température et de la pression, de l'hygrométrie et de la longueur d'onde. La dépendance suivant la longueur d'onde sera développée au chapitre 3.3, on se place ici dans le cas monochromatique. La dépendance avec l'hygrométrie  $c$  n'est significative que dans le cas de propagations horizontales en atmosphères marines, elle est donc négligée dans le cas des observations astronomiques pour lesquelles l'atmosphère est modélisée par un milieu sec. Les variations d'indice de l'air  $n = N - \langle N \rangle$  vont donc suivre la loi de Kolmogorov :

$$\Phi_n(\mathbf{k}) = 0,033C_N^2 k^{-11/3} \quad (2.4)$$

Le terme  $C_N^2$  est appelé constante de la fonction de structure d'indice et caractérise la contribution de la turbulence aux variations d'indice.

Rappelons maintenant brièvement la relation reliant l'indice de réfraction à la surface d'onde. Une onde lumineuse peut être entièrement décrite par son amplitude complexe dans le plan perpendiculaire au rayon lumineux moyen :  $A(\mathbf{x})e^{i\varphi(\mathbf{x})}$ . Dans le cas général,  $A(\mathbf{x})$  et  $\varphi(\mathbf{x})$  sont quelconques et représentent respectivement l'amplitude et la phase dans le plan de référence. On peut toutefois noter les quelques cas particuliers suivants :

- Pour une onde plane,  $A(x, y)$  et  $\varphi(x, y)$  sont uniformes et on prend généralement  $A = 1$  et  $\varphi(x, y) = 0$ .
- Pour une onde sphérique de rayon de courbure  $R$ ,  $A(x, y) = 1$  et  $\varphi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda}(x^2 + y^2)/R^2$ .

Dans le cadre des observations astronomiques la surface d'onde est assimilée à un plan. Elle provient en effet d'une source dont la distance à la terre, comparée à la taille des télescopes, justifie cette hypothèse. Pour une mince couche turbulente (d'épaisseur  $\delta h$ ), l'amplitude n'est pas perturbée (pas d'absorption) et la phase (initialement nulle) est donnée par :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{2\pi}{\lambda} \int_{\delta h} n(\mathbf{x}, z) dz \quad (2.5)$$

Cette onde perturbée va se propager sur une distance  $h$  pour arriver au sol. Cela se traduit par la

convolution de l'amplitude complexe (ici  $e^{i\varphi(\mathbf{x})}$ ) par le terme de Fresnel traduisant la diffraction. L'amplitude complexe au niveau du sol sera donnée par :

$$\Psi_0(\mathbf{x}) = e^{i\varphi(\mathbf{x})} \star \frac{-i}{\lambda h} e^{i\pi \frac{x^2}{\lambda h}} \quad (2.6)$$

Ce terme de propagation crée des variations d'amplitude  $A_0(\mathbf{x})$  et de phase  $\varphi_0(\mathbf{x})$  au niveau du sol.

Je considère tout d'abord le cas des variations d'amplitude  $A_0(\mathbf{x})$ . Pour une petite pupille (comme l'œil) ceci se traduit par des variations aléatoires de l'intensité de l'étoile observée. On appelle ces variations d'amplitude : scintillation. Pour des pupilles plus grandes on parle d'ombres volantes, observables dans un plan conjugué du plan pupille. Ces ombres volantes sont similaires aux surbrillances et aux ombres visibles au fond d'une piscine ou d'un cours d'eau au soleil.

Pour que la scintillation soit significative, il faut que la première zone de Fresnel soit de la taille de la zone de cohérence de l'atmosphère<sup>3</sup> :  $r_0 = \sqrt{\lambda h}$ , soit dans le visible ( $\lambda = 500nm$ ) et pour une turbulence moyenne ( $r_0 = 10cm$ ), une distance de propagation de  $h \geq 20km$ . Ceci correspond approximativement à l'altitude maximale des couches turbulentes, c'est pourquoi la scintillation est négligeable dans le cas des observations astronomiques du moins tant que l'objet observé reste élevé au dessus de l'horizon (typiquement au delà de  $30^\circ$  d'élévation au dessus de l'horizon). Pour plus de détails sur la scintillation et ses propriétés le lecteur pourra consulter les articles de Dravins *et al.*[12, 13, 14].

La grande majorité des études de l'effet de la turbulence atmosphérique sur les images astronomiques porte donc sur les variations de phase  $\varphi_0(\mathbf{x})$ . Plusieurs grandeurs caractéristiques de la phase peuvent être déduites des équations (2.5) et (2.6). Tout d'abord la fonction de structure de la phase au sol, dérivée de la loi de Kolmogorov et de la propagation :

$$D_\varphi(\mathbf{x}) = 2,91 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (\cos \gamma)^{-1} x^{5/3} \int C_N^2(h) dh \quad (2.7)$$

$\gamma$  désigne l'angle zénithal (*i.e.*, l'angle entre le zénith et la ligne de visée). En considérant le pouvoir de résolution, on définit le paramètre de Fried[15]  $r_0$  comme étant le diamètre du

---

<sup>3</sup>La longueur de cohérence de la turbulence atmosphérique est appelée paramètre de Fried et notée  $r_0$ , voir l'équation (2.8)



télescope optiquement parfait qui a la même résolution qu'un télescope uniquement limité par la turbulence atmosphérique (*i.e.*, de diamètre infini). Ce paramètre est particulièrement important dans l'étude de la turbulence car il donne également une mesure de la longueur de cohérence de la phase :

- les télescopes de diamètres inférieurs à  $r_0$  sont limités par la diffraction.
- pour les télescopes de diamètres proches de  $r_0$  le seul effet notable de la turbulence est le tilt (voir figure 1.1).
- les télescopes de diamètres supérieurs à  $r_0$  sont limités par la turbulence.

Connaissant le profil de turbulence  $C_N^2(h)$ , le  $r_0$  est donné par :

$$r_0 = \left[ 0,423 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (\cos \gamma)^{-1} \int C_N^2(h) dh \right]^{-3/5} \quad (2.8)$$

Dans les sites d'observation astronomique, le paramètre de Fried est de l'ordre de 10 – 20cm dans le visible avec 10cm en moyenne (angle de seeing  $\varepsilon = 0.98\lambda/r_0 = 0,88''$ ) lors de la campagne de mesure GSM sur le site du VLT[9].

Une autre grandeur importante est l'angle isoplanétisme. C'est le domaine angulaire à l'intérieur duquel les perturbations de l'atmosphère sont homogènes. Pour une seule couche turbulente située à une altitude  $h$ , il est approximativement donné par le rapport  $r_0/h$  : angle sous lequel est vue la zone de cohérence de la turbulence. Plus précisément, pour un profil de turbulence  $C_N^2(h)$  l'angle d'isoplanétisme est donné par :

$$\theta_0 = \left[ 2,91 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (\cos \gamma)^{-1} \int C_N^2(h) h^{5/3} dh \right]^{-3/5} \quad (2.9)$$

L'angle d'isoplanétisme est de l'ordre de quelques secondes d'arc dans le visible (1,90'' en moyenne lors de la campagne de mesure GSM sur le site du VLT[9])

Je me penche à présent sur l'analyse de la phase perturbée par la turbulence. Afin de décrire cette phase aléatoire, deux approches sont possibles :

- La description zonale : la phase est une somme de fonctions à support borné. Ces fonctions peuvent être par exemple les pixels de la pupille dans le cas d'une simulation, des fonctions de type « splines », etc.
- La description modale : la phase est décomposée sur une somme de modes (fonctions continues sur toute la pupille).

Je m'intéresserai dans la suite à la décomposition modale car c'est à partir de celle-ci que le tilt est défini. C'est également cette approche que j'ai retenue pour modéliser les images de l'expérience MaTilD (voir chapitre 6.5.1).

## 2.2 Décomposition modale de la surface d'onde

Afin de simplifier la décomposition de la surface d'onde, il est judicieux de choisir une base de fonctions orthonormée, mais ceci n'est pas une condition nécessaire. C'est pourquoi on choisit couramment la base des polynômes de Zernike. Celle-ci est en effet construite en coordonnées circulaires sur un support circulaire (c'est le cas d'une lentille). Les polynômes de Zernike présentent l'avantage d'être définis analytiquement et pour les premiers ordres de s'identifier aux aberrations optiques : défocalisation, astigmatisme, coma, etc (voir figure 2.1). L'expression analytique en coordonnées circulaires  $(r, \theta)$  des polynômes de Zernike[16, 17] de degré radial  $n$  et de degré azimutal  $m$  est :

$$z_{n,m}(r, \theta) = \begin{cases} \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \cos(m\theta) \\ \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \sin(m\theta) \end{cases} \quad (2.10)$$

Dans le cas particulier de  $m = 0$ , on ne considère que le premier polynôme de Zernike :  $\sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2}$ . La fonction  $R_n^m(r)$  étant donnée par :

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+m)/2 - s]! [(n-m)/2 - s]!} r^{(n-2s)} \quad (2.11)$$

$m$  et  $n$  sont liés par la relation  $(n-m)/2 \geq 0$ .

- Le premier mode de la décomposition Zernike  $z_{0,0} = 1$  est le piston. Il correspond à un retard global de la phase sur la pupille. Les systèmes optiques constitués d'une seule pupille, ne sont pas sensibles à ce mode.
- Les deux modes suivants  $z_{1,1} = 2r \cos(\theta)$  et  $2r \sin(\theta)$  correspondent à des plans inclinés dans la pupille, il s'agit du tilt<sup>4</sup> qui sera étudié plus en détail dans le chapitre 2.3.
- Les modes suivants, par ordre croissant de l'ordre azimutal et radial, sont : la défocalisation  $z_{0,2}$ , les astigmatismes  $z_{2,2}$ , les comas doubles  $z_{1,3}$  et triples  $z_{3,3}$  (voir figure 2.1)

---

<sup>4</sup>on différencie ces deux modes orthogonaux en parlant de tip-tilt

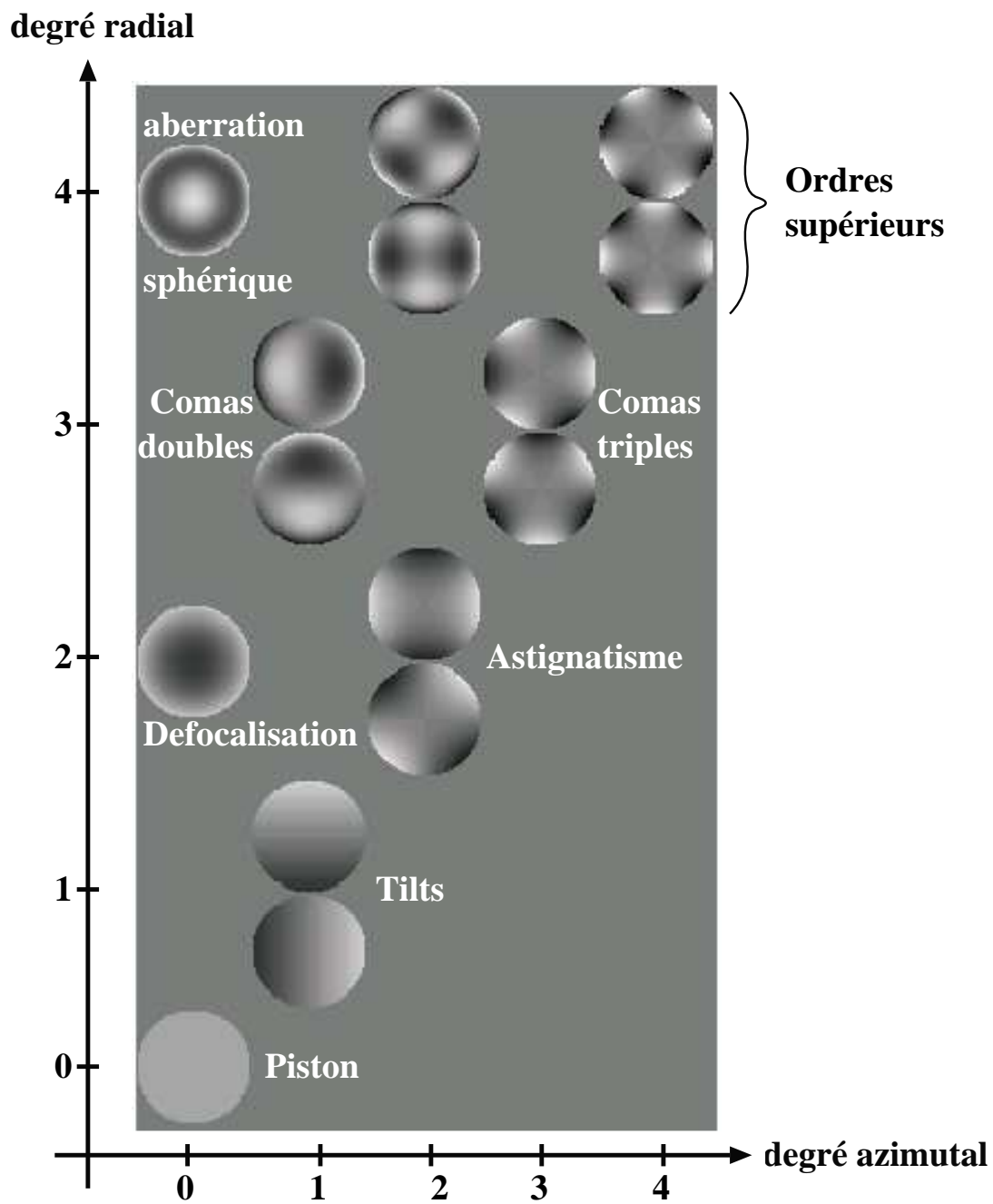


FIG. 2.1 – 15 premiers modes Zernike classés par ordre radial (axe  $y$ ) et azimuthal (axe  $x$ ) croissants

Cette base est largement utilisée en optique adaptative[18, 19] car elle est orthonormée sur une pupille circulaire. Mais ce n'est plus le cas lorsque la pupille n'est plus un disque, par exemple lorsqu'elle présente une obstruction centrale[20]. Ainsi une décomposition sur les modes Karhunen-Loève[21, 20] peut se révéler utile mais elle est d'un emploi plus complexe puisqu'elle ne s'exprime pas analytiquement. Dans le cas de l'ajustement d'un modèle sur les données MaTilD, j'ai choisi de construire numériquement une base orthonormée en coordonnées cartésiennes (voir chapitre 6).

## 2.3 Un mode particulier : le tilt

Je vais plus particulièrement m'intéresser à un mode de la turbulence : le tilt. En effet, ce mode est un peu particulier de par son amplitude, son effet sur les images et son rôle dans l'étoile laser.

### 2.3.1 Définition

Il me paraît tout d'abord important de préciser ce qu'est le tilt. Ce terme, ou plus précisément le tip-tilt, désigne les deuxième et troisième modes de la décomposition de la surface d'onde sur la base des polynômes de Zernike. Ils correspondent à la pente des plans inclinés dans des directions orthogonales d'équations  $z = x$  et  $z = y$ . La projection  $\theta$  de la phase sur ces plans s'écrit :

$$\begin{cases} \theta_x = \int_{\varnothing} x \varphi(x, y) dx / \int_{\varnothing} x^2 dx \\ \theta_y = \int_{\varnothing} y \varphi(x, y) dy / \int_{\varnothing} y^2 dy \end{cases} \quad (2.12)$$

Il est à remarquer que ces équations correspondent à la pente du plan ajusté sur la phase selon le critère des moindres carrés :

$$\theta_x = \arg \min_{\theta} \left[ \int_{\varnothing} (\varphi(x, y) - \theta \cdot x)^2 \right] \quad (2.13)$$

L'effet sur les images d'une rampe de phase est un déplacement proportionnel à la pente de cette rampe. L'ajout d'un tilt dans la phase se traduit donc par un déplacement global de

l'image. Les astronomes utilisent généralement le terme « tilt » pour désigner le déplacement de l'image (ou plus précisément de son centre de gravité) par rapport à sa position moyenne. Cependant ceci n'est pas correct dans le cas de télescopes de diamètre grand devant  $r_0$ . Comme  $r_0$  indique la longueur de cohérence de la turbulence, jusqu'à des tailles de l'ordre de  $r_0$ , le tilt est le seul mode détectable. Ainsi, pour de petits télescopes, la turbulence a pour effet de déplacer la tache de diffraction de manière aléatoire : le tilt est alors très bien estimé par ce déplacement. Par contre lorsqu'on considère des télescopes de dimensions supérieures à la longueur de cohérence, d'autres modes de la turbulence deviennent significatifs. Or tous les modes non centro-symétriques déplacent le centre de gravité de l'image (c'est le cas, par exemple, de la coma). Il n'y a alors plus équivalence entre le déplacement de l'image et le tilt. En réalité, le centre de gravité est défini comme étant l'angle d'arrivée de la surface d'onde. Dans le cas où la scintillation est négligeable, Tatatarskii[22] a montré que l'angle d'arrivée  $((\alpha_x, \alpha_y)$  en coordonnées cartésiennes) est donné par la moyenne sur la pupille du gradient de la différence de marche  $(\lambda \phi / 2\pi)$  :

$$\begin{cases} \alpha_x = -\frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{S_\phi} \iint_\phi \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} dx dy \\ \alpha_y = -\frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{S_\phi} \iint_\phi \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} dx dy \end{cases} \quad (2.14)$$

Le tilt et l'angle d'arrivée sont donc deux quantités différentes comme on peut le voir sur la figure 2.2. Dans le cas particulier d'une pupille linéaire, l'angle d'arrivée est la différence de phase au bord de la pupille tandis que le tilt est la droite ajustée sur la phase. La présence de coma visible sur la phase implique la différence importante entre angle d'arrivée et tilt. Dans le cas de pupille circulaire, et comme on le verra dans la suite, la différence est moins prononcée (ce qui justifie, dans la plupart des cas, l'utilisation de l'angle d'arrivée comme estimateur du tilt). Cette figure permet également de voir que le tilt, à une échelle considérée, intègre les modes à une échelle supérieure : le tilt de la phase située entre les abscisses 3 et 6 mètres provient en grande partie de la coma visible entre 0 et 10 mètres. Cette « origine » du tilt sera utile lors de l'analyse de ces propriétés.

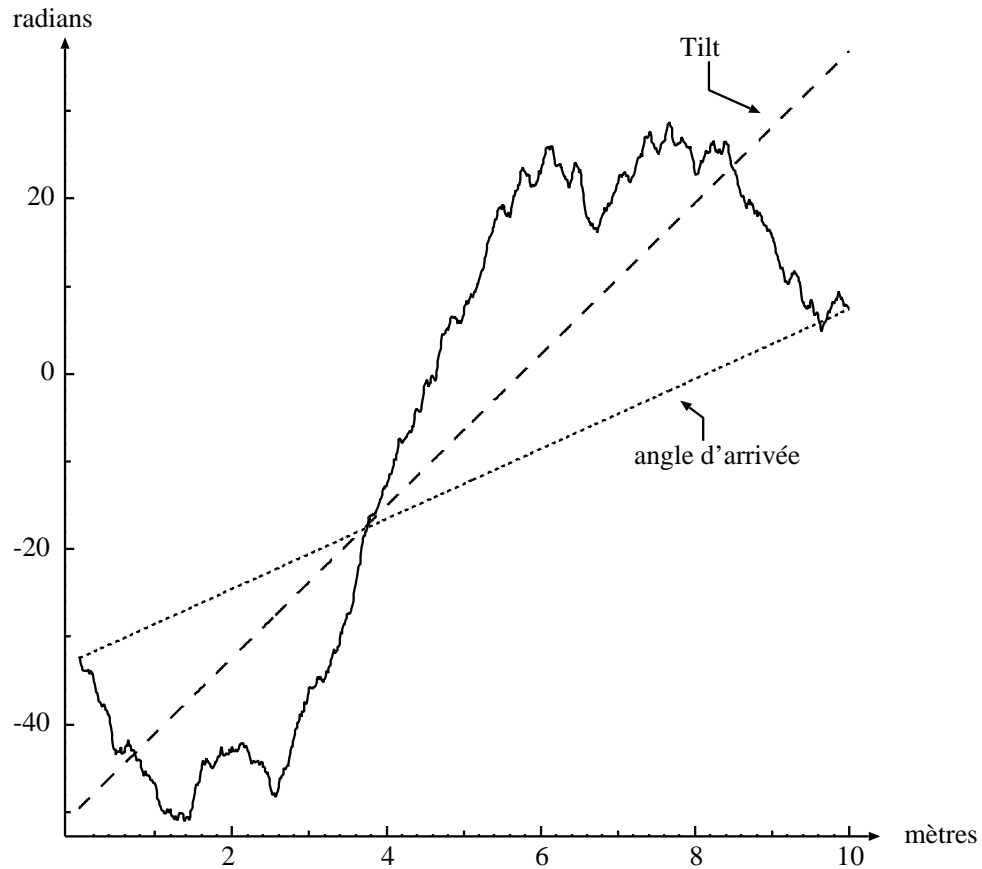


FIG. 2.2 – *Différence entre tilt et angle d'arrivée dans le cas de la phase sur un télescope de 10 mètres de diamètre. La phase est obtenue par simulation ( $r_0 = 10\text{cm}$ , l'algorithme de R. Lane et al.[23]). On peut noter la différence significative entre le tilt et l'angle d'arrivée, dans le cas d'une pupille linéaire.*

### 2.3.2 Propriétés

#### Écart entre tilt et angle d'arrivée

La distinction entre le tilt et l'angle d'arrivée n'est généralement pas faite par les astronomes qui utilisent indifféremment les deux termes. Ici il est nécessaire de bien les différencier car le tilt joue un rôle central dans le cadre de l'étoile laser en particulier de l'étoile laser polychromatique. On peut alors distinguer[24, 25] le  $Z$ -tilt et le  $G$ -tilt. Ils correspondent respectivement au tilt (mode de Zernicke) et à l'angle d'arrivée (Gradient moyen de la phase). En effet l'écart est faible pour les pupilles circulaires, les variances respectives du tilt et de l'angle d'arrivée, sont données par[24] :

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta}^2 &= 0,3641 \left( \frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \left( \frac{\lambda}{D} \right)^2 \\ \sigma_{\alpha}^2 &= 0,3399 \left( \frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \left( \frac{\lambda}{D} \right)^2\end{aligned}\tag{2.15}$$

Le fait que la variance du tilt soit plus forte que la variance de l'angle d'arrivée suggère que les modes non centro-symétriques sont (en partie au moins) anticorrélés avec le tilt. Ce fait est d'ailleurs visible sur la figure 2.2.

On peut également s'intéresser à la différence entre le tilt et l'angle d'arrivée, c'est à dire l'erreur que l'on commet en les supposant égaux. Ceci est réalisé par Sasiela[24] dans son analyse, la variance de la différence est alors donnée par :

$$\sigma_{\theta-\alpha}^2 = 0,0061 \left( \frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \left( \frac{\lambda}{D} \right)^2\tag{2.16}$$

Il est à noter que cette variance n'est pas égale à la différence des variances du tilt et de l'angle d'arrivée à cause de la corrélation mentionnée ci-dessus entre ces deux quantités. Pour un télescope de taille moyenne ( $D = 3,6m$ ) et une bonne turbulence ( $r_0 = 20cm$ ), l'écart type de l'erreur de positionnement de la tache de diffraction est de  $\sigma_{(\theta-\alpha)}(D = 3,6m) = 24 \text{marcsec} = 0,87\lambda/D$  soit 71% de la demi-largeur de la tache d'Airy ( $1,22\lambda/D$ ). Ce qui est, généralement, suffisamment faible pour autoriser l'utilisation de l'angle d'arrivée comme estimateur du tilt. Par contre, pour un télescope de  $10m$  de diamètre, dans les mêmes conditions de turbulence, l'écart type de l'erreur est  $\sigma_{(\theta-\alpha)}(D = 10m) = 2\lambda/D$ . L'erreur est alors supérieure à la taille de la tache

de diffraction. Notons que cette valeur est obtenue sous l'hypothèse d'une turbulence de type Kolmogorov. Or pour des télescopes de diamètre de l'ordre de 10 mètres, l'effet de l'échelle externe est sensible, diminuant ainsi l'amplitude du tilt (voir chapitre 2.3.2).

### Importance du tilt par rapport aux autres modes

Le tilt est un mode dont l'étude est importante dans le cadre de l'analyse de l'effet de la turbulence atmosphérique sur la surface d'onde. En effet, il s'agit du mode prédominant de la turbulence dans le cadre de la théorie de Kolmogorov. Dans ce cas et en considérant que la scintillation est négligeable, il est possible de calculer l'importance du tilt par rapport aux autres modes de la turbulence. Noll[16] a montré que la variance du tilt représente  $\approx 87\%$  de la variance totale de la phase.

Il est intéressant de comparer l'effet du tilt seul par rapport à l'ensemble des modes d'ordres plus élevés. Toujours sous l'hypothèse d'une phase de type Kolmogorov, avec une correction parfaite de tous les ordres élevés (le tilt étant la seule dégradation de la surface d'onde par la turbulence), on peut estimer le rapport de Strehl<sup>5</sup> comme le fait Sasiela[24] :

$$\mathcal{S} \approx \left[ 1 + 0,899 \left( \frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \right]^{-1} \quad (2.17)$$

Soit :

- pour un télescope de diamètre  $D$  de 3,6 mètres et un  $r_0 = 20cm$  :  $\mathcal{S}_{tilt} \approx 9.10^{-3}$
- pour un télescope de diamètre  $D$  de 10 mètres et un  $r_0 = 20cm$  :  $\mathcal{S}_{tilt} \approx 1,6.10^{-3}$ . Il s'agit ici d'un minorant puisqu'on a vu précédemment que l'existence d'une échelle externe réduit l'énergie du mode tilt pour ces échelles.

Ces valeurs sont à comparer à  $\mathcal{S}_\infty \approx (r_0/D)^2 \approx 3.10^{-3}$  sur une image non corrigée. On voit ici l'importance de la correction du tilt. Une correction, même parfaite des autres modes ne permet pratiquement aucun gain si le tilt n'est pas corrigé. Inversement la correction du tilt seul améliore significativement la qualité de l'image.

---

<sup>5</sup>Le rapport de Strehl  $\mathcal{S}$  est défini comme le rapport du maximum de l'intensité dans l'image aberrante sur le maximum de l'image parfaite (tâche d'Airy).



### Tilt et échelle externe

Les développements précédents sont valides dans le cas d'un spectre de Kolmogorov, c'est à dire pour des échelles  $x$  comprises dans le domaine inertiel, entre :  $\ell_0 \ll x \ll \mathcal{L}_0$ . Mais avec l'arrivée des télescopes géants de 10 mètres de diamètres, on se situe à la limite du domaine inertiel et l'échelle externe de la turbulence a alors une influence sur le tilt.

En effet, pour des échelles supérieures à l'échelle externe, l'énergie turbulente sature. Il n'y a plus de tourbillons de taille supérieure pour fournir de l'énergie cinétique. Les modes de la turbulence correspondant à ces échelles sont donc affaiblis. Ceci est particulièrement sensible sur le tilt (basse fréquence spatiale). Lorsque l'échelle externe est finie, la variance des angles d'arrivée  $\sigma_m^2$  est modélisé[26] par :

$$\sigma_m^2 = 2 * 0,0114 \pi \lambda^2 r_0^{-5/3} \mathcal{L}_0^{-1/3} \int_1^{1+\mathcal{L}_0^2/D^2} (X-1) X^{-11/6} dX \quad (2.18)$$

Où  $\mathcal{L}_0$  désigne l'échelle externe dans le cadre de la modélisation de la densité spectral de puissance de la phase  $W_\phi(f)$  de von Kármán :

$$W_\phi(f) = 0.0228 r_0^{-5/3} (f^2 + 1/\mathcal{L}_0^2)^{-11/6} \quad (2.19)$$

On notera qu'une différence entre le paramètre de Fried déterminé à partir de l'équation (2.15) et le paramètre de Fried obtenu par un ajustement du modèle donné par Roddier[8] (voir équation (2.20)) est révélateur d'un effet de l'échelle externe non négligeable. En effet, le modèle de Roddier rend compte de l'élargissement de l'image « courte pose » par la turbulence. L'échelle externe n'a pas d'effet notable sur cet élargissement qui est dû au modes d'ordres supérieurs :

$$\langle |S(f)|^2 \rangle = |T(f)|^2 \exp \left[ -6,88 \frac{\lambda^{5/3}}{r_0} \left( 1 - \frac{\lambda^{1/3}}{D} \right) \right] \quad (2.20)$$

Où  $|Tf|^2$  est la fonction de transfert du télescope optiquement parfait. À partir de  $r_0$  ainsi déterminé, il est possible d'estimer la valeur de l'échelle externe par inversion de l'équation (2.18).

Les études et les mesures de l'échelle externe ont montré que celle-ci est de l'ordre de quelques dizaines de mètres[10]. L'atténuation du tilt est donc détectable sur les plus grands télescopes. Avec la planification de télescopes de 30 à 100 mètres de diamètre, on s'attend à une amplification de ce phénomène. Ceci a pour conséquence de réduire le problème du tilt

(voir chapitre 3.2.3) des étoiles laser. Certaines études[27] tendent à montrer que les étoiles laser ne serait plus utiles pour les télescopes extrêmement grands. La taille du télescope permettrait en effet d'utiliser des étoiles très faibles comme source de référence pour l'optique adaptative assurant ainsi une bonne couverture du ciel. L'étoile laser reste toutefois pleinement justifier pour les télescope actuels.

L'effet de l'échelle externe est également sensible dans le cas de la propagation horizontale proche du sol (comme c'est le cas dans l'expérience MaTilD). Lorsque l'on considère la turbulence proche du sol, la taille maximale des tourbillons est de l'ordre de l'altitude du faisceau. L'échelle externe peut donc être assez faible (quelques mètres). L'atténuation sur le tilt est alors détectable même pour des optiques de petit diamètre. Ceci a pu être mis en évidence lors de l'expérience MaTilD (voir chapitre 4.3.2).



## Chapitre 3

# De l'optique adaptative à l'étoile laser polychromatique

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>L'optique adaptative . . . . .</b>	<b>24</b>
<b>3.2</b>	<b>L'étoile laser . . . . .</b>	<b>27</b>
3.2.1	Concept . . . . .	27
3.2.2	Effet de cône . . . . .	27
3.2.3	Problème du tilt . . . . .	31
<b>3.3</b>	<b>L'étoile laser polychromatique . . . . .</b>	<b>37</b>
3.3.1	Principe . . . . .	37
3.3.2	Tilt différentiel . . . . .	38
3.3.3	Génération des longueurs d'onde . . . . .	40

---

### 3.1 L'optique adaptative

Parmi les différentes techniques permettant d'atteindre la limite de diffraction, l'optique adaptative est la plus utilisée. Son principe, proposé par Babcock en 1953[3] est relativement simple, mais sa mise en œuvre se révèle complexe. Le principe est basé sur la mesure en temps réel des déformations de la surface d'onde causées par la turbulence. Connaissant la déformation incidente, on applique sur la surface d'onde la déformation inverse par l'intermédiaire d'un miroir déformable placé dans un plan conjugué de la pupille (voir schéma 3.1). L'analyse de la

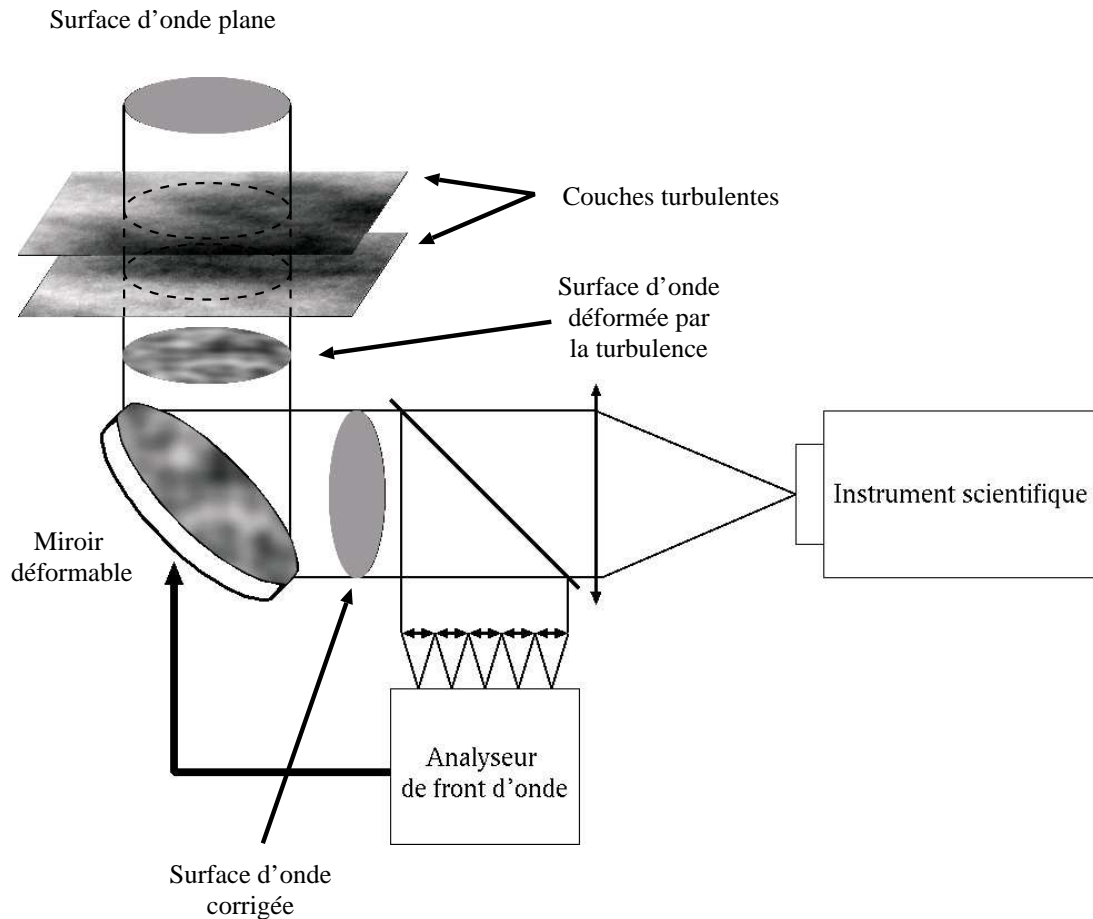


FIG. 3.1 – *Schéma de principe de l'optique adaptative : la surface d'onde déformée par la turbulence atmosphérique est analysée et les déformations sont compensées en temps réel par un miroir déformable.*

surface d'onde est effectuée en mesurant sur des sous-pupilles la pente locale (système Shack-Hartmann) ou la courbure locale (système senseur de courbure) de la phase. Celle-ci est ensuite reconstruite à partir de ces données. Il est important de noter que ces systèmes ne présupposent

pas la forme de l'objet de référence (ce peut être une étoile ou une galaxie) tant que la taille de celui-ci est inférieure à l'angle d'isoplanétisme. Dans le cas d'objets étendus (comme par exemple pour l'observation de la surface solaire) d'autres méthodes sont à utiliser (diversité de phase, intercorrélation des données Shack-Hartmann[28]).

Il existe bien évidemment plusieurs limitations à cette méthode, d'ordre technique ou fondamental. Je ne considérerai dans la suite que les limitations fondamentales qui ont conduit aux propositions d'étoile laser et d'étoile laser polychromatique.

La limitation fondamentale de l'optique adaptative vient de la mesure de la surface d'onde. En effet pour mesurer celle-ci il faut disposer d'une source lumineuse dont la surface d'onde est connue avant sa traversée de l'atmosphère. C'est une étoile qui va remplir ce rôle. Comme la turbulence évolue relativement vite (typiquement  $10 \rightarrow 100ms$  pour le visible), il faut effectuer la mesure rapidement, ce qui limite le nombre de photons collectés et donc la précision de la mesure et finalement la correction. L'étoile doit donc être suffisamment brillante. De plus, la correction effectuée à partir d'une étoile n'est valide que sur une faible portion du ciel : le domaine d'isoplanétisme. Comme on peut le voir sur la figure 3.2, la déformation de la surface d'onde dépend de l'angle de visée. La correction de l'optique adaptative ne sera donc valide que pour des angles de visée proches de l'étoile de référence : cela couvre environ  $1 - 3 arcsec^2$  dans le visible.

La taille du domaine d'isoplanétisme et le nombre d'étoiles brillantes dans le visible limitent l'utilisation de l'optique adaptative. Le domaine observable avec cette technique représente moins de quelques pourcents du ciel dans le proche infrarouge et dans le visible (environ 0,1%) pour un télescope de 8 mètres de diamètre comme le montre le tableau extrait de l'article de LeLouarn *et al.*[29]. En parallèle des méthodes d'étoiles laser qui vont être développées dans la suite, l'utilisation de l'optique adaptative multiconjuguée permet d'augmenter le champ corrigé et donc la couverture du ciel[27]

Dans l'infrarouge, le nombre d'étoiles brillantes augmente ainsi que l'angle isoplanétisme ( $\propto \lambda^{5/6}$ ), la couverture du ciel atteint donc quelques dizaines de pourcents. Afin de permettre une couverture complète du ciel, notamment dans le visible, Foy et Labeyrie [5] ont proposé en 1985 le principe de l'étoile laser.

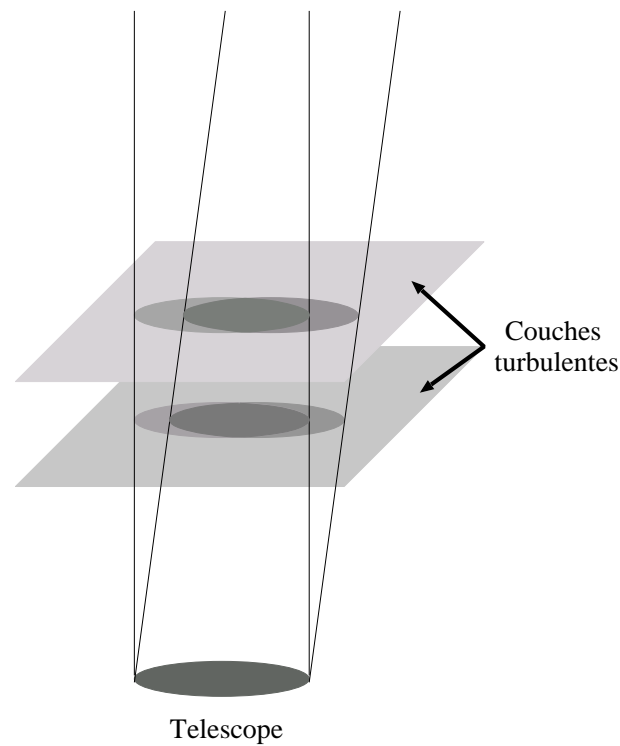


FIG. 3.2 – *Effet de l’anisoplanétisme de la turbulence atmosphérique : la déformation de la surface d’onde varie avec l’angle de visée.*

Bande photométrique	Latitude galactique $\lambda$		
	$\lambda = 0^\circ$	$\lambda = 45^\circ$	$\lambda = 90^\circ$
K (2,2 $\mu m$ )	15%	1%	0,05%
J (1,25 $\mu m$ )	2%	0,2%	< 0,01%

TAB. 3.1 – *Couverture du ciel pour un télescope de 8 mètres de diamètre, dans des conditions moyennes de turbulence (pour le site du VLT), pour un rapport de Strehl supérieur à 20%, en fonction de la latitude galactique et du domaine spectral.*

## 3.2 L'étoile laser

### 3.2.1 Concept

Le principe de l'étoile laser est d'utiliser comme source de référence la rétrodiffusion d'un faisceau laser par l'atmosphère. Cette technique est utile lorsque aucune source naturelle se trouve dans le domaine d'isoplanétisme de la source observée. L'étoile laser crée ainsi une source lumineuse qui peut être placée où l'on le désire sur la voûte céleste.

Plusieurs types de rétrodiffusion peuvent être utilisés (voir figure 3.3) : diffusion Mie, Rayleigh ou la diffusion résonnante sur des atomes. Il y a toutefois un impératif sur l'altitude à laquelle se produit cette rétrodiffusion : il faut que la source de référence soit située au dessus des plus hautes couches turbulentes ayant un effet significatif sur la dégradation des images, c'est à dire au dessus de  $30\text{km}$  d'altitude. Ceci exclut donc la diffusion Mie qui est quasi inexistante au delà des premiers kilomètres. La diffusion Rayleigh est importante à basse altitude, mais son intensité décroît et elle n'est guère utilisable au delà de  $40\text{km}$  d'altitude. Toutefois, un certain nombre d'expériences ont été effectuées avec ce type de rétrodiffusion du fait de l'efficacité du processus. La diffusion Rayleigh présente néanmoins un inconvénient majeur : un important effet de cône<sup>1</sup> (voir chapitre 3.2.2). Cet effet diminuant, sans pour autant disparaître, avec l'altitude de la source laser, il est intéressant d'utiliser la rétrodiffusion provenant d'une région plus élevée. Il se trouve justement dans la mésosphère (vers  $90\text{km}$  d'altitude) une région riche en atomes de sodium. Le sodium possédant un seul électron sur sa couche de valence, il est facilement excitable. On utilise alors la diffusion résonnante (absorption-émission de photons par excitation de l'électron de valence). Les dispositifs actuels (Alfa, Keck, Gemini) utilisent cette diffusion.

### 3.2.2 Effet de cône

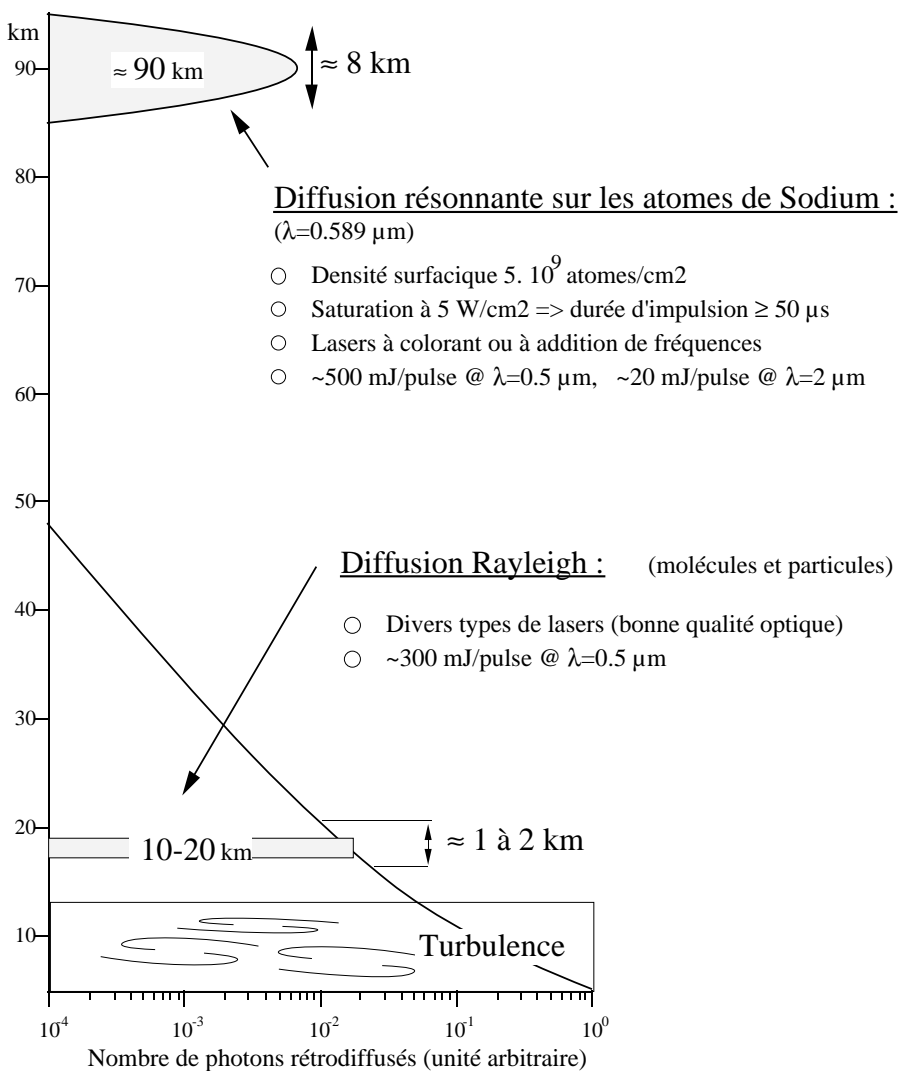
L'effet de cône est dû à l'altitude finie de l'étoile laser. Il cause deux types d'erreur sur l'estimation de la surface d'onde :

---

<sup>1</sup>c'est l'effet de parallaxe venant de la distance finie à laquelle se trouve l'étoile laser par rapport à la source observée. Ce point est détaillé dans le chapitre 3.2.2



## Processus de diffusion



Michel Tallon - Janvier 1995

FIG. 3.3 – Flux rétrodiffusé pour les différents phénomènes de diffusion atmosphérique en fonction de l'altitude

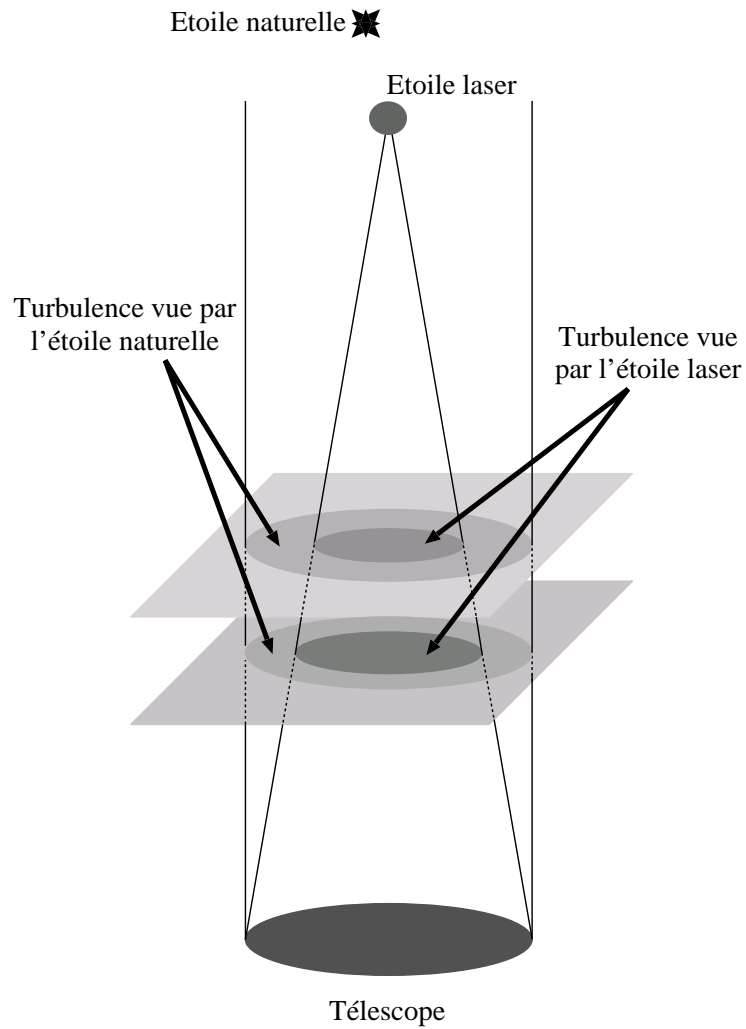


FIG. 3.4 – *Effet de cône dû à la distance finie de l'étoile laser : effet de zoom des couches élevées et mauvaise estimation de la turbulence.*

- Par différence entre la propagation sphérique et la propagation parallèle, la surface d'onde venant de l'étoile laser ne couvre pas toute la turbulence traversée par les rayons de l'étoile naturelle (voir figure 3.4).
- La turbulence située à haute altitude est «zoomée» par rapport à la turbulence située à basse altitude : la portion de couche turbulente interceptée par le faisceau laser est plus petite que la pupille du télescope. Mais après propagation vers le sol, elle couvrira toute la surface de la pupille du télescope.

Ces deux effets peuvent être corrigés en utilisant plusieurs étoiles laser réparties dans le champ d'observation (voir figure 3.5). Ces étoiles laser sont placées de façon à caractériser entièrement la turbulence traversée par les rayons de l'objet astronomique, c'est le principe de la cartographie 3D de la turbulence. Cette méthode conjuguée avec l'emploi de plusieurs miroirs déformables permet d'agrandir le champ corrigé[30] au delà du domaine isoplanétisme. C'est le principe de l'optique adaptative multiconjuguée.

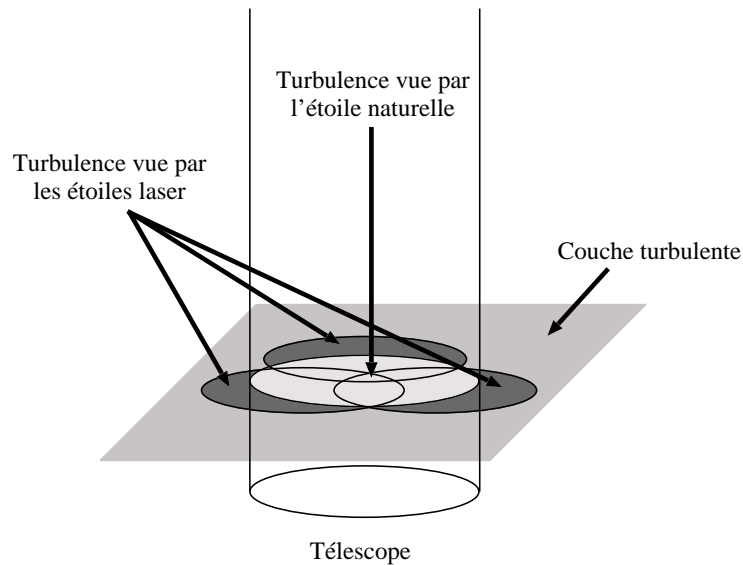


FIG. 3.5 – *Correction de l'effet de cône par l'utilisation de plusieurs étoiles laser (au minimum trois), réparties autour du champ d'observation*

### 3.2.3 Problème du tilt

En plus de l'effet de cône, une autre limitation fondamentale de l'étoile laser est l'impossibilité de mesurer le tilt de la surface d'onde par la seule observation de l'étoile laser.

Considérons tout d'abord le cas d'un seul télescope (voir figure 3.6), qui émet le faisceau

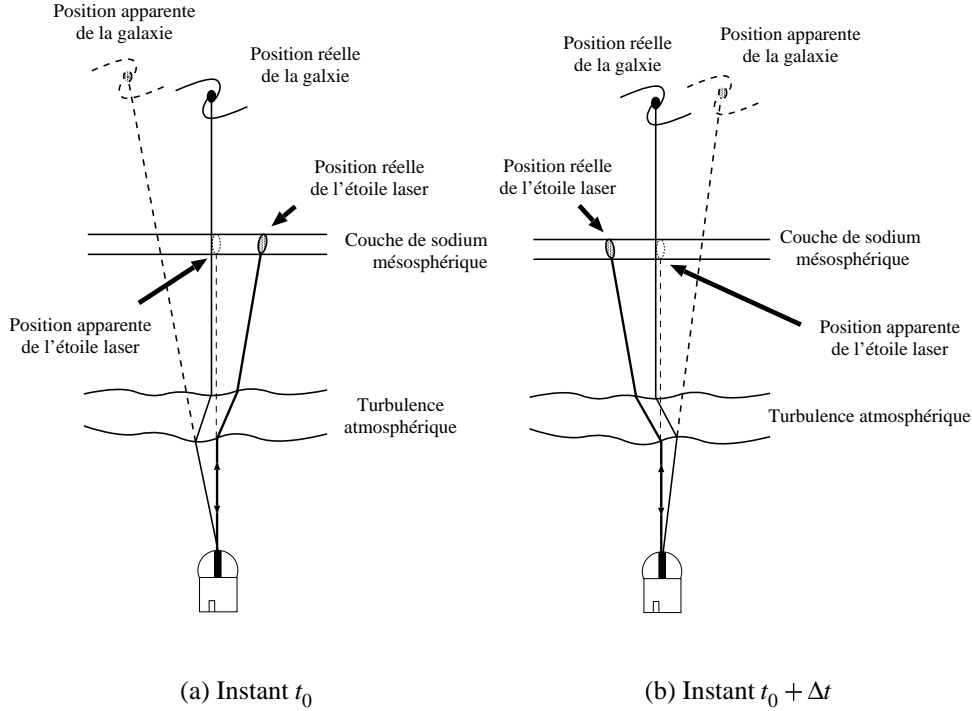


FIG. 3.6 – *Indétermination du tilt dans le cas d'un seul télescope, la position apparente de l'étoile laser est fixe tandis que celle de l'objet astronomique varie suivant la turbulence*

et qui observe l'étoile laser (l'objet astronomique étant trop faible pour être vu par le système d'optique adaptative). Lorsque le faisceau laser est émis, il est dévié par l'atmosphère à cause du tilt. La tache laser ne se forme donc pas dans la ligne de visée du télescope mais décalée de l'angle de tilt de la turbulence  $\theta_{\uparrow}$ . Au retour, la lumière émise par l'étoile laser va à nouveau être déviée de l'angle opposé  $\theta_{\downarrow} = -\theta_{\uparrow}$  car le temps d'aller retour du faisceau laser ( $600\mu s$ ) est négligeable devant le temps caractéristique d'évolution de l'atmosphère ( $10 \rightarrow 100ms$  dans le visible). Ainsi l'étoile laser est fixe dans le champ du télescope car la position apparente est la somme des déviations aller et retour  $\theta_{laser} = \theta_{\uparrow} + \theta_{\downarrow} = 0$ . Par contre, l'objet astronomique ne subit que la déviation lors du trajet haut  $\rightarrow$  bas. Il bouge aléatoirement dans le champ du

télescope sous l'effet de la turbulence  $\theta_* = \theta_{\downarrow} \neq 0$ .

Pour des raisons de transport du faisceau laser et notamment de qualité des traitements optiques, le télescope qui émet le faisceau (appelé télescope d'émission et noté (1) dans la suite) est généralement différent du télescope qui observe l'objet astrophysique et l'étoile laser (appelé télescope de réception et noté (2) dans la suite). Dans ce cas, l'étoile laser n'est plus fixe dans le champ, mais son mouvement reste indépendant de celui de l'objet astronomique (voir figure 3.7). En effet la position de l'étoile laser est donnée par  $\theta_{laser} = \theta_{laser\uparrow}^{(1)} + \theta_{laser\downarrow}^{(2)}$  et

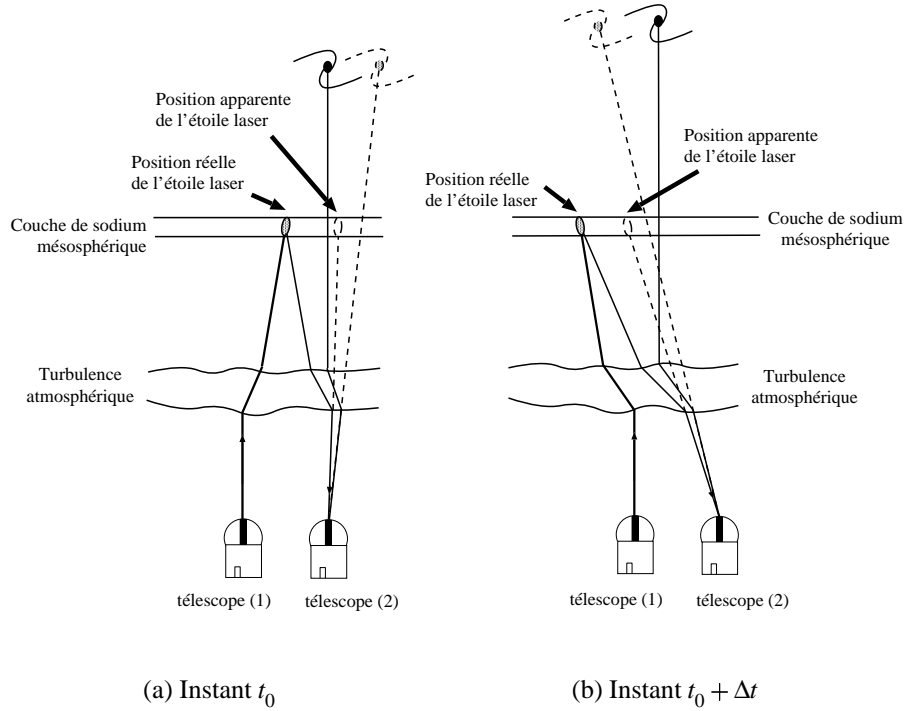


FIG. 3.7 – *Indétermination du tilt dans le cas de deux télescopes distincts, la position apparente de l'étoile laser change avec la turbulence.*

celle de l'étoile naturelle est donnée uniquement par le tilt lors du trajet haut  $\rightarrow$  bas :  $\theta_* = \theta_{*\downarrow}^{(2)} = \theta_{laser\downarrow}^{(2)} \neq \theta_{laser}$ .

Que l'on utilise un ou 2 télescope, il est donc impossible de mesurer le tilt depuis l'étoile laser car on ne peut pas différencier  $\theta_{laser\uparrow}$  et  $\theta_{laser\downarrow}$ . En d'autres termes il est impossible de savoir où la tache laser s'est formée dans la couche de sodium.

Il est important de remarquer que cette indétermination n'affecte pas les autres modes de la

turbulence bien qu'ils soient présents lors des trajets aller et retour :

- Si le diamètre du faisceau laser est plus petit que le paramètre de Fried  $r_0$ , le tilt est le seul effet notable sur la surface d'onde (voir chapitre 2.1). La répartition d'intensité dans la mésosphère est donc identique à celle lors de l'émission (typiquement gaussienne). Le seul effet est un déplacement de la tache laser dans la mésosphère.
- Si le diamètre du faisceau est supérieur à  $r_0$ , les modes d'ordres élevés (défocalisation, astigmatisme, coma, ...) vont perturber la surface d'onde et après propagation vers la couche de sodium, se traduire par de la scintillation (voir chapitre 2). Celle-ci va modifier la répartition d'éclairement de la couche de sodium c'est-à-dire la forme de la tache laser. Comme le système d'analyse de front d'onde est indifférent à la forme de l'objet de référence, la déformation de la tache n'influe pas sur la mesure. Le système d'optique adaptative mesure donc bien uniquement les modes d'ordres élevés, introduits par la turbulence lors du trajet mésosphère→sol.

Le cas de la défocalisation est plus complexe : si la forme de la tache image n'a pas d'effet sur la mesure de la turbulence, sa position perturbe la mesure. Le déplacement de la tache laser suivant l'axe optique (dénommé  $z$ ) est identifié à une défocalisation (de la même façon, un déplacement de la tache laser dans le plan perpendiculaire au faisceau *i.e.*,  $(x, y)$  est identifiable à un tilt). Cette variation d'altitude vient de l'épaisseur de la couche de sodium et de la variation de son profil de densité (voir figure 3.8). Plusieurs études ont été menées pour quantifier les variations de l'altitude moyenne de la couche de sodium montrant des variations saisonnières mais également des phénomènes sporadiques probablement dus à l'entrée dans l'atmosphère de météorites ou à des phénomènes convectifs dans la mésosphère. Ceux-ci apparaissent très rapidement (de quelques secondes à quelques minutes) et causent un déplacement typique de la tache de  $\approx 100m$  en altitude, pouvant aller jusqu'à  $1km$  d'altitude. La défocalisation ainsi créée n'est pas très importante et ne va donc pas dégrader les performances de l'optique adaptative. Mais elle est toutefois à prendre en compte dans le calcul de performances du système d'optique adaptative : une variation de  $250m$  cause une erreur sur la surface d'onde de  $39nm\ rms$  (ce qui par exemple dans le cas du VLT, et de son système d'optique adaptative NAOS, dépasse l'erreur tolérée en sortie (de  $15nm\ rms$ )[31]). Ce problème peut toutefois être corrigé en mesurant

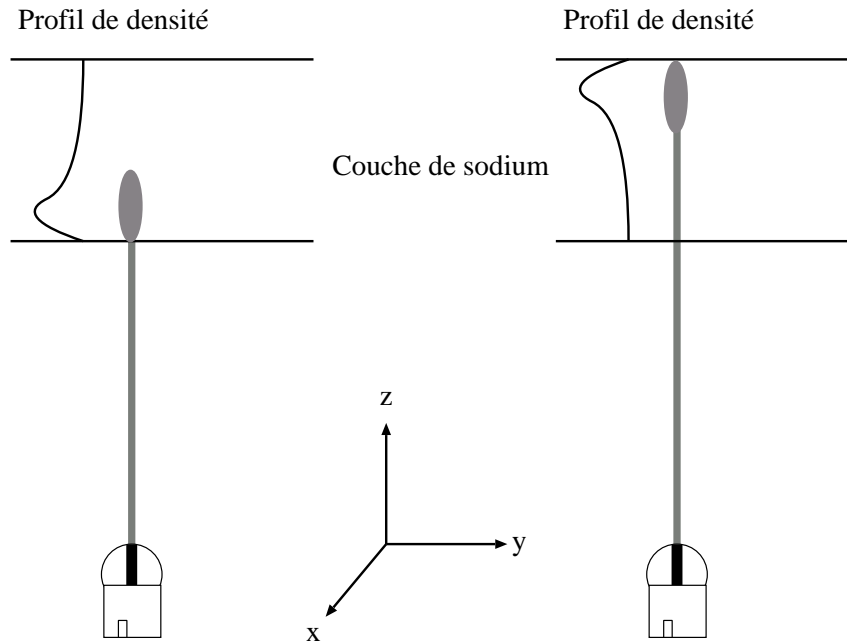


FIG. 3.8 – *Effet de la variation de profil de densité de la couche de sodium sur le mode défocalisation.*

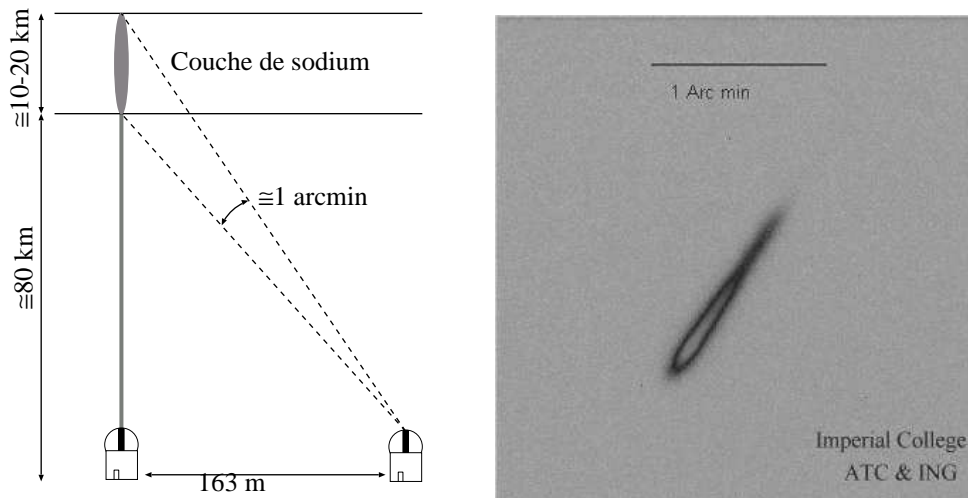


FIG. 3.9 – *Pinceau lumineux de l'étoile laser vue de côté dû à l'épaisseur de la couche de sodium. Photographie provenant du site « Laser Guide Star Preparatory Study » de l'Imperial College ([http://op.ph.ic.ac.uk/jkt\\_lgs/](http://op.ph.ic.ac.uk/jkt_lgs/)), résultat de l'expérience menée à La Palma (20 septembre 1999). L'image est obtenue à partir d'un télescope situé à 163m du télescope d'émission, le faisceau se propageant du coin en bas à gauche de l'image au coin en haut à droite.*

simultanément à l'observation, le profil de la couche de sodium à l'aide d'un petit télescope auxiliaire (voir figure 3.9).

### Solutions potentielles

Plusieurs solutions ont été proposées pour lever l'indétermination du tilt, car sans cette correction, l'optique adaptative n'offre qu'une couverture du ciel très limitée notamment dans le visible (voir le chapitre 2.3.2). On peut noter deux types d'approche : soit on cherche une autre référence de tilt et l'étoile laser ne mesure que les modes d'ordre plus élevé, soit on cherche à mesurer le tilt subi par le laser lors de son trajet sol→mésosphère :  $\theta_{\uparrow}$ .

Dans le cas de la première approche proposée par Rigaut *et al.*[32], la correction des modes d'ordre élevé de la turbulence à partir de l'étoile laser permet d'utiliser des étoiles plus faibles comme références pour le tilt car l'image des étoiles est beaucoup plus piquée. En effet, la sensibilité du système de détection du tilt (proportionnelle à la largeur de l'image[33]) est accrue. La couverture du ciel est alors augmentée, notamment dans l'infrarouge (près de 80%) et atteint 10 – 25% dans le visible pour des télescopes de 10 mètres de diamètre.

Afin de couvrir tout le ciel dans le visible, il faut considérer la deuxième approche et déterminer le tilt atmosphérique sans source de référence située dans le domaine d'isoplanétisme de l'objet étudié. Plusieurs solutions ont été proposées reposant sur deux principes :

1. L'effet de perspective. Les solutions basées sur cet effet et proposées par Ragazzoni[34, 35, 36, 37] utilisent l'épaisseur de la couche de sodium (10 à 20km). Vue de côté, celle-ci apparaît comme un pinceau lumineux (voir figure 3.9). La proposition de Ragazzoni consiste à placer un télescope auxiliaire (voir figure 3.10) pour qu'une étoile soit dans le domaine d'isoplanétisme du pinceau lumineux (soit  $\approx 1 - 2 \text{ arcsec}$ ). On peut alors mesurer le tilt de l'étoile  $\theta_{\star}^{(2)} = \theta_{\star\downarrow}^{(2)}$ , et celui du segment laser situé dans le même domaine d'isoplanétisme :  $\theta_{laser}^{(2)} = \theta_{laser\uparrow}^{(1)} + \theta_{laser\downarrow}^{(2)}$ . Comme  $\theta_{\star\downarrow}^{(2)} = \theta_{laser\downarrow}^{(2)}$  la différence de tilt est donc due au trajet aller du laser :  $\theta_{laser\uparrow}^{(1)} = \theta_{laser}^{(2)} - \theta_{\star}^{(2)}$ . Celui-ci est le même quel que soit le point de vue, en particulier depuis le télescope d'observation (1). On est alors en mesure d'estimer le tilt atmosphérique vu par ce télescope à partir du tilt de l'étoile laser  $\theta_{atm\downarrow}^{(1)} = \theta_{laser}^{(1)} - (\theta_{laser}^{(2)} - \theta_{\star}^{(2)})$ . Mais cette méthode nécessite de disposer de télescopes



mobiles afin de conserver l'alignement entre l'étoile et le pinceau lumineux. Ces télescope doivent se déplacer sur une surface important de l'ordre du kilomètre carré. Plusieurs problèmes technologiques sont donc à résoudre pour pouvoir couvrir tout le ciel avec cette méthode.

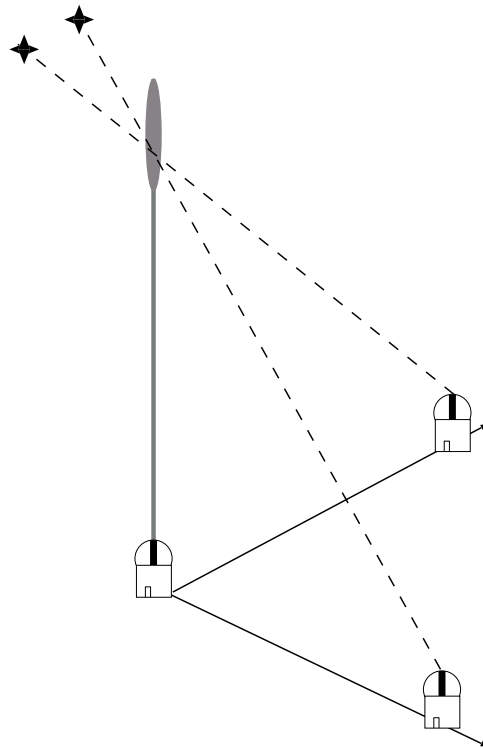


FIG. 3.10 – *Principe de la détermination du tilt grâce à l'effet de perspective*

2. L'utilisation du chromatisme de l'indice de réfraction de l'air. C'est le principe de l'étoile laser polychromatique proposé par Foy *et al.*[6] qui est détaillée au chapitre 3.3.

En marge de ces techniques basées sur l'utilisation d'une étoile laser on peut mentionner la proposition de Ribak d'utiliser un plasma généré dans l'ionosphère par les interférences de deux faisceaux d'onde radio. Ces franges de plasma présentent l'avantage de ne pas être soumises à un tilt lors du trajet sol-l'ionosphère des ondes radio, mais l'effet de cône reste présent bien qu'atténué par l'altitude où se forme les interférences (200km).

### 3.3 L'étoile laser polychromatique

#### 3.3.1 Principe

La solution proposée par Foy *et al.*[6] d'étoile laser polychromatique pour l'optique adaptative, consiste à déterminer le tilt à une longueur d'onde donnée à partir de la différence du tilt entre deux longueurs d'onde. Pour cela, plusieurs processus physiques sont mis en œuvre :

1. La possibilité de générer des longueurs d'onde par cascade radiative au dessus des couches turbulentes de l'atmosphère. Cette cascade radiative provient de l'excitation des atomes de sodium par deux faisceaux laser (voir § 3.3.3). Les longueurs d'onde de ces deux faisceaux sont très proches, le tilt sol→mésosphère est alors quasiment identique<sup>2</sup> :  $\theta_{\lambda_{\uparrow}} \approx \theta_{\lambda'_{\uparrow}} = \theta_{\uparrow}$ .
2. Le chromatisme de l'indice de réfraction de l'air implique que les tilts, aux différentes longueurs d'onde, sont différents lors du trajet mésosphère→sol :  $\theta_{\lambda_{1\downarrow}} \neq \theta_{\lambda_{2\downarrow}}$ . Ainsi la position apparente de l'étoile laser dépend de la longueur d'onde :  $\theta_{\lambda_1} = \theta_{\uparrow} + \theta_{\lambda_{1\downarrow}} \neq \theta_{\lambda_2} = \theta_{\uparrow} + \theta_{\lambda_{2\downarrow}}$ . On voit donc que la différence n'est due qu'au trajet mésosphère→sol :  $\theta_{\lambda_1} - \theta_{\lambda_2} = \theta_{\lambda_{1\downarrow}} - \theta_{\lambda_{2\downarrow}}$  (voir figure 3.11).
3. Connaissant la loi de variation de l'indice de l'air et le tilt différentiel ( $\theta_{\lambda_1} - \theta_{\lambda_2}$ ), on peut remonter à la mesure du tilt à une longueur d'onde donnée :  $\theta_{\lambda_3} = \frac{n_{\lambda_3} - 1}{n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}} (\theta_{\lambda_1} - \theta_{\lambda_2})$ .

Cette solution, qui permet de s'affranchir totalement de sources naturelles pour l'optique adaptative, peut couvrir 100% du ciel. Elle pourrait également s'appliquer à d'autres domaines que l'astronomie :

- Les communications interplanétaires à haut débit. Ce type de communications serait notamment utilisé dans le cadre de missions spatiales habitées afin de permettre la transmission d'images avec un débit suffisant pour la communication de type vidéo-conférence. Le débit élevé d'information impose l'utilisation de longueurs d'onde proches de l'optique. Afin de limiter la puissance nécessaire à l'émission des messages, le faisceau doit parfaitement être collimaté. Or l'émission d'un tel faisceau depuis le sol sera soumis à la

---

<sup>2</sup>En fait chaque faisceau crée une tache lumineuse au niveau de la mésosphère, c'est l'intersection de ces deux taches qui va former l'étoile laser polychromatique.

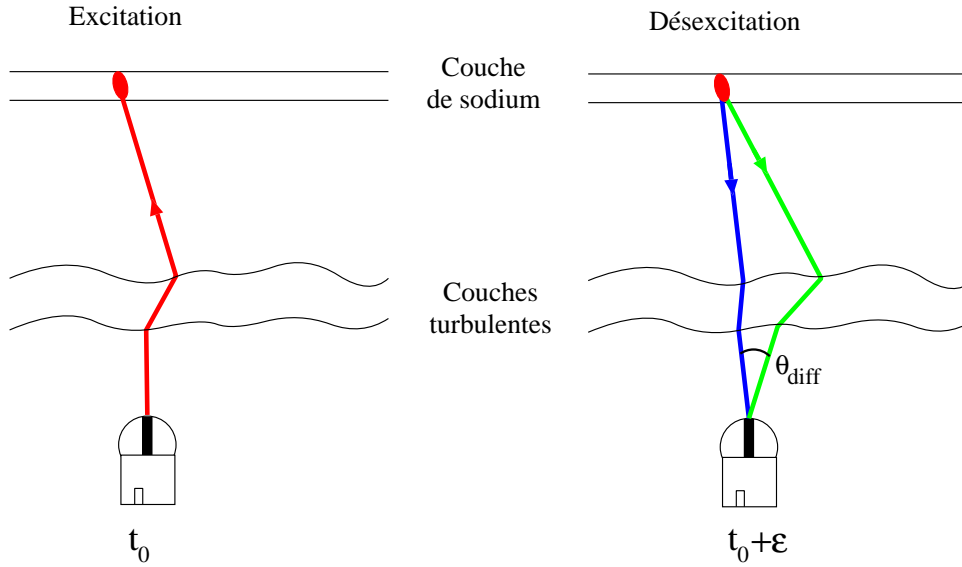


FIG. 3.11 – *Principe de l'étoile laser polychromatique. Ici l'effet chromatique est accentué, en réalité la différence de tilt entre les deux faisceaux retour est très faible : ces deux faisceaux traversent la même turbulence.*

turbulence atmosphérique. Un système permettant de précorriger le faisceau à l'émission sans aucune source extérieure de référence est donc particulièrement adapté, d'autant plus que le champ nécessaire est nul.

- La destruction des débris en orbite autour de la terre. La présence de nombreux débris en orbite[38] présente un risque élevé de collision avec les satellites actuellement en fonctionnement ou la station internationale ISS. Il serait possible d'éliminer une partie de ces débris à l'aide d'un puissant faisceau laser. Son impact sur le débris crée alors un plasma qui le freine et le fait entrer dans l'atmosphère où il se consume. Là aussi il est nécessaire de disposer d'un système permettant de précorriger le faisceau laser afin d'obtenir l'éclairement le plus intense possible sur le débris.

### 3.3.2 Tilt différentiel

Le tilt différentiel désigne la différence de tilt due au chromatisme de l'indice de réfraction de l'air. Comme on l'a vu dans le chapitre 2.1, la surface d'onde est définie par l'équation (2.5). Jusqu'à présent je considérais le cas d'une onde monochromatique, la dépendance de l'indice

de l'air avec la longueur d'onde n'intervenait pas. Mais si on prend en compte cette dépendance, la surface d'onde, à une longueur d'onde  $\lambda$ , est donnée par :

$$\Gamma(\lambda, \mathbf{x}) = \int_{\mathcal{C}} n(\lambda, \mathbf{x}, z) dz \quad (3.1)$$

Je vais montrer comment les propriétés chromatiques de l'indice de réfraction de l'air permettent d'utiliser le tilt différentiel pour mesurer le tilt.

### Propriété chromatique de l'indice de l'air

L'indice de réfraction est défini comme le rapport des célérités de la lumière dans le vide et dans le milieu considéré :  $n = c_0/c$ . Par définition, l'indice de réfraction du vide est égal à 1. Dans un milieu, la célérité de la lumière est réduite, l'indice de réfraction est donc supérieur à 1. La variation relative  $(n - n_0)/n_0 = n - 1$  est déterminée par les propriétés électromagnétiques du milieu. Pour l'air ces propriétés peuvent être déduites de la théorie des gaz parfaits qui modélise très bien l'atmosphère terrestre[39].

Dans le cadre des gaz parfaits, le chromatisme de  $n - 1$  est donné par les raies d'absorption des gaz constituants. Ce sont les abondances relatives des gaz qui fixent le chromatisme. Celui-ci est donc indépendant du nombre total de molécules présentes. Par contre le nombre total de molécules influence l'intensité de l'indice de réfraction relatif  $n - 1$ . La fonction  $n(\lambda, P, T) - 1$  est donc à variables séparables :

$$n(\lambda, P, T) - 1 = F(\lambda) \cdot G(P, T) \quad (3.2)$$

C'est cette relation qui va permettre la mesure du tilt à partir du tilt différentiel.

### Mesure du tilt à partir du tilt différentiel

Pour un système insensible au mode piston<sup>3</sup>, c'est le cas des télescopes monopupille<sup>4</sup>, la surface d'onde détectée est :

$$\tilde{\Gamma}(\lambda, \vec{x}) = \Gamma(\lambda, \vec{x}) - \underbrace{\frac{1}{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} \Gamma(\lambda, \vec{x}) d\mathbf{x}}_{\text{Piston}} \quad (3.3)$$

<sup>3</sup>le piston est la moyenne de la phase sur la pupille

<sup>4</sup>les interféromètres (pupille morcelée) sont sensibles au piston différentiel entre les sous-pupilles

Ce qui donne, en utilisant successivement (3.1) et (3.2) :

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}(\lambda, \vec{x}) &= \int_{\mathcal{C}} n(\lambda, \mathbf{x}, z) dz - \frac{1}{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{C}} n(\lambda, \mathbf{x}, z) dz d\mathbf{x} \\ &= F(\lambda) \cdot \left[ \int_{\mathcal{C}} G(P, T) dz - \frac{1}{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{C}} G(P, T) dz d\mathbf{x} \right] \\ &= F(\lambda) \cdot \tilde{G}(P, T)\end{aligned}\quad (3.4)$$

Pour trois longueurs d'onde quelconques  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , on dispose donc de la relation :

$$\tilde{\Gamma}(\lambda_1, \vec{x}) - \tilde{\Gamma}(\lambda_2, \vec{x}) = \frac{F(\lambda_1) - F(\lambda_2)}{F(\lambda_3)} \tilde{\Gamma}(\lambda_3, \vec{x}) \quad (3.5)$$

Pour des longueurs d'onde allant de l'ultra-violet au proche infrarouge ( $200nm \rightarrow 1,4\mu m$ ) et pour  $P_0 = 1,013 \cdot 10^8 Pa$  et  $T_0 = 288 K$ ,  $n_\lambda - 1$  est donné[40] par (voir figure 3.12) :

$$(n_\lambda - 1) \cdot 10^6 = 64,318 + \frac{29498,1}{146,0 - 1/\lambda^2} + \frac{255,4}{41,0 - 1/\lambda^2} \quad (3.6)$$

Avec  $\lambda$  exprimée en microns. Cette formule est obtenue par ajustement aux mesures de laboratoire. C'est cette fonction qui est couramment utilisée pour le calcul de la réfraction atmosphérique. L'équation (3.5) est invariante par transformation linéaire de la surface d'onde, en particulier par projection sur les polynômes de Zernike ou pour le calcul des angles d'arrivée. Elle s'applique donc pour le tilt :

$$\theta_{diff} = \theta_{\lambda_1} - \theta_{\lambda_2} = \frac{n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}}{n_{\lambda_3} - 1} \theta_{\lambda_3} \quad (3.7)$$

Comme le montre la courbe 3.12, la différence  $n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}$  est d'autant plus importante (en valeur absolue) que les longueurs d'onde sont distinctes et que l'une d'entre elles se situe dans l'ultra-violet. Comme on le verra au chapitre 3.3.3, les longueurs d'onde utilisables, par l'étoile laser polychromatique, sont 330 et 589nm. Entre celle-ci, on a  $\frac{\Delta n}{n_{500} - 1} \approx \frac{1}{25}$ . Ceci signifie qu'il faut mesurer précisément le tilt différentiel : il faut une précision de mesure du tilt différentiel 25 fois supérieure à la correction attendue. Soit pour corriger l'effet du tilt à 500nm sur un télescope de 8m de diamètre avec  $r_0 = 20cm$  à mieux que la tache d'Airy, il faut mesurer le tilt différentiel avec une précision de 0,6marcsec pour un écart type du tilt de :  $1,22\lambda/D \approx 15marcsec$ .

### 3.3.3 Génération des longueurs d'onde

Je m'intéresse à présent au processus de génération des longueurs d'onde dans la couche de sodium. L'atome de sodium possède un seul électron de valence et la section efficace de

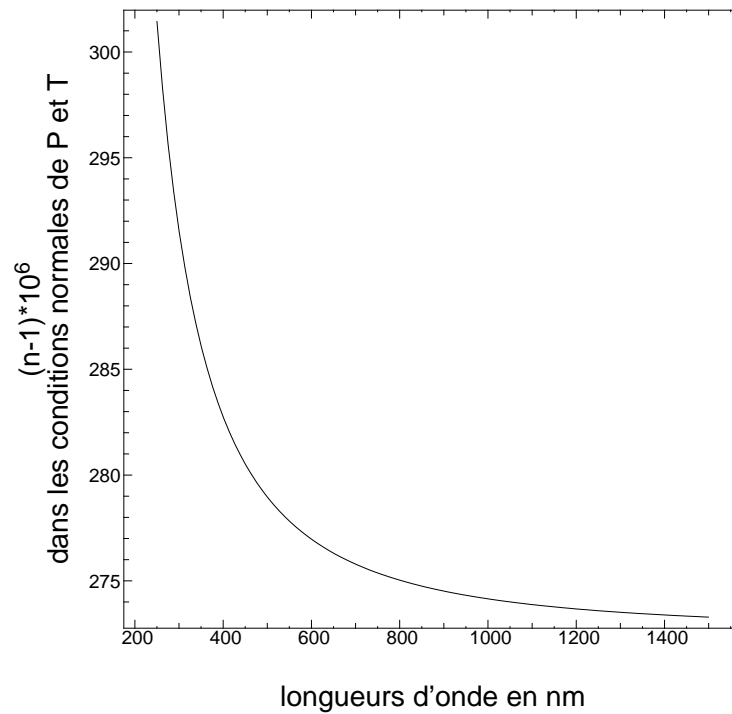


FIG. 3.12 – Variations de l'indice de réfraction de l'air en fonction de la longueur d'onde pour le domaine du visible

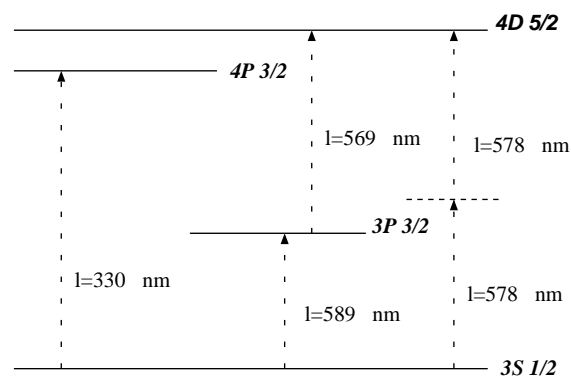


FIG. 3.13 – Diverses possibilités d'excitation de l'atome de sodium depuis le niveau fondamental pour obtenir une cascade radiative polychromatique

sa première transition est relativement grande. Il est donc aisé d'obtenir par excitation de cet électron une cascade radiative. L'immense majorité de ces atomes de sodium se trouve dans l'état fondamental  $3S_{1/2}$ . Pour obtenir une cascade radiative polychromatique avec des rayonnements dans le visible et le proche ultraviolet, il faut les exciter à un niveau supérieur à  $3P$ . Les règles de sélection de la mécanique quantique laissent trois possibilités (figure 3.13) qui ont des probabilités élevées :

- Excitation du niveau  $4P_{3/2}$  à l'aide d'un photon de longueur d'onde :  $\lambda = 330nm$ .
- Excitation du niveau  $4D_{5/2}$  : deux méthodes sont alors possibles :
  - excitation cohérente par deux photons de longueurs d'onde :  $\lambda = 578nm$ . On passe alors par un niveau virtuel.
  - passage par le niveau  $3P_{3/2}$  par un photon de longueur d'onde  $\lambda = 589nm$  puis au niveau  $4D_{5/2}$  par un photon de longueur d'onde  $\lambda = 569nm$ .

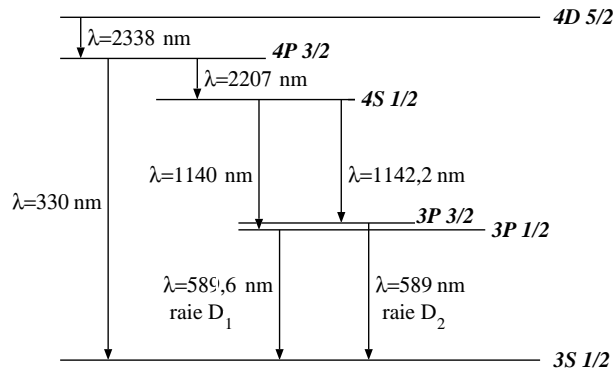


FIG. 3.14 – *Diagramme des niveaux d'énergie du Sodium, principales raies de désexcitation depuis le niveau  $4D_{5/2}$*

La première solution n'a pas été retenue : la section efficace du processus  $3P_{1/2} \rightarrow 4P_{3/2}$  est 50 fois plus faible que celle du processus  $3P_{1/2} \rightarrow 3P_{3/2}$ . De plus, la transmission atmosphérique à  $330nm$  est de  $\simeq 50\%$  au lieu de  $\simeq 100\%$  à  $589nm$ .

De même, la section efficace de l'excitation non résonnante par deux photons de même longueur d'onde à  $\lambda = 578nm$  est très faible, cette solution n'a pas été retenue.

C'est donc l'excitation  $3S_{1/2} \rightarrow 3P_{3/2} \rightarrow 4D_{5/2}$  qui est utilisée. La figure 3.14 montre les principales raies de la cascade radiative depuis le niveau  $4D_{5/2}$ .

Une étude détaillée du processus d'excitation des atomes de sodium mésosphériques a été effectuée au cours de la phase A du projet ÉLP-OA (Étoile Laser Polychromatique pour l'Optique Adaptative (voir chapitre 4.1) qui est détaillé au chapitre 4.1.





# Chapitre 4

## Mesure du tilt différentiel

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Le projet ÉLP-OA : Étoile Laser Polychromatique pour l'Optique Adaptive . . . . .</b>	<b>46</b>
<b>4.2</b>	<b>Expérience MaTilD . . . . .</b>	<b>47</b>
4.2.1	Domaine spectral . . . . .	47
4.2.2	Configuration de l'expérience . . . . .	50
<b>4.3</b>	<b>Expériences et mesures . . . . .</b>	<b>60</b>
4.3.1	Première version de l'expérience MaTilD . . . . .	60
4.3.2	Deuxième version de l'expérience MaTilD . . . . .	60
<b>4.4</b>	<b>Protocole de mesure et pré-traitement des images . . . . .</b>	<b>63</b>
4.4.1	Prétraitement des images . . . . .	63
4.4.2	Mode opératoire des mesures . . . . .	65

---

## 4.1 Le projet ÉLP-OA : Étoile Laser Polychromatique pour l'Optique Adaptative

Le travail que j'ai effectué sur la mesure du tilt différentiel (mesure chromatique de la déviation des faisceaux par l'atmosphère) s'intègre dans un projet national : ÉLP-OA (*Étoile Laser Polychromatique pour l'Optique Adaptative*).

Ce projet multipartenaires regroupe plusieurs laboratoires (CRAL, École Polytechnique, CEA, ONÉRA, Laboratoire de spectrométrie physique de Grenoble) et un industriel (CILAS). Il a pour objectif de montrer la faisabilité, dans son ensemble, du principe de l'étoile laser polychromatique. Afin d'atteindre cet objectif, le projet est divisé en deux phases : une phase d'études de faisabilité et une phase de réalisation d'un démonstrateur de l'étoile laser polychromatique sur le ciel.

C'est au cours de la phase d'études que les points suivants ont été étudiés :

- l'interaction laser-atome, avec notamment la réalisation de deux expériences PASS I[41] et PASS II[42] (*Polychromatic Artificial Sodium Star*)
- le bilan de liaison, c'est-à-dire l'estimation du nombre de photons détectés provenant de l'étoile laser polychromatique en fonction des caractéristiques du laser d'excitation[43, 44, 45].
- la faisabilité de la mesure différentielle du tilt, qui fait l'objet de mon travail de thèse.

La mesure du tilt différentiel n'ayant jamais été effectuée avec succès auparavant<sup>1</sup>, j'ai entrepris de réaliser une expérience pour en montrer la faisabilité et déterminer les points limitant la mesure. C'est l'expérience MaTilD : **M**anipulation de **T**ilt **D**ifférentiel. L'objectif de celle-ci n'est pas de simuler une étoile laser polychromatique en termes de longueur d'onde, de turbulence ou de flux, mais de se placer dans les conditions réelles, optimales pour mesurer le tilt différentiel (voir chapitre 4.2). J'ai donc développé un instrument dédié à cette mesure. J'ai également pu tester deux algorithmes de traitement (voir les chapitres 5 et 6) afin de mesurer le tilt différentiel.

---

<sup>1</sup>communications privées avec Ribak et Angels

## 4.2 Expérience MaTilD

Cette expérience doit permettre la mesure simultanée du mode tilt à plusieurs longueurs d'onde. La solution retenue pour cela est de disposer d'un système répartissant sur une caméra les images monochromatiques d'un trou source, observé à travers la turbulence, réparties sur un spectre le plus large possible. Le déplacement différentiel de ces images est le tilt différentiel recherché.

La conception de cette expérience a été effectuée en tenant compte des points suivants :

- Large domaine spectral s'étendant au maximum vers l'ultraviolet : l'étude de la variation de l'indice de réfraction de l'air avec la longueur d'onde montre que le chromatisme  $\Delta n = n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}$  est d'autant plus important que les longueurs d'onde sont éloignées et situées dans l'ultra-violet.
- Utilisation optimale de la turbulence : Fried[15] a montré qu'il existe une valeur optimale du rapport entre le diamètre de la pupille  $D$  et le paramètre de Fried  $r_0$  pour lequel l'effet du déplacement de l'image est maximal par rapport à son étalement. L'optimum se situe à  $D/r_0 = 3,4$ .
- Limitation des « vibrations » : ce terme désigne les mouvements relatifs de la source et de l'instrument. Ceux-ci créent un déplacement des images sans être dû à la turbulence. Ceci produit un tilt achromatique qui ne bruite pas la mesure différentielle. Toutefois il est nécessaire de limiter les vibrations car elles détruisent la relation entre le déplacement des images (tilt+ vibration) et le déplacement différentiel des images (tilt différentiel seul).
- L'instrument de mesure ne doit pas être chromatique afin de ne pas introduire de tilt différentiel propre qui perturberait les mesures et qui nécessiterait une caractérisation fine de l'instrument.

### 4.2.1 Domaine spectral

Le choix du domaine spectral est basé sur l'analyse de la courbe de variation de l'indice de l'air avec la longueur d'onde (voir figure 4.1). La variation de l'indice est d'autant plus importante que l'on considère des longueurs d'onde courtes et éloignées. Le domaine spectral

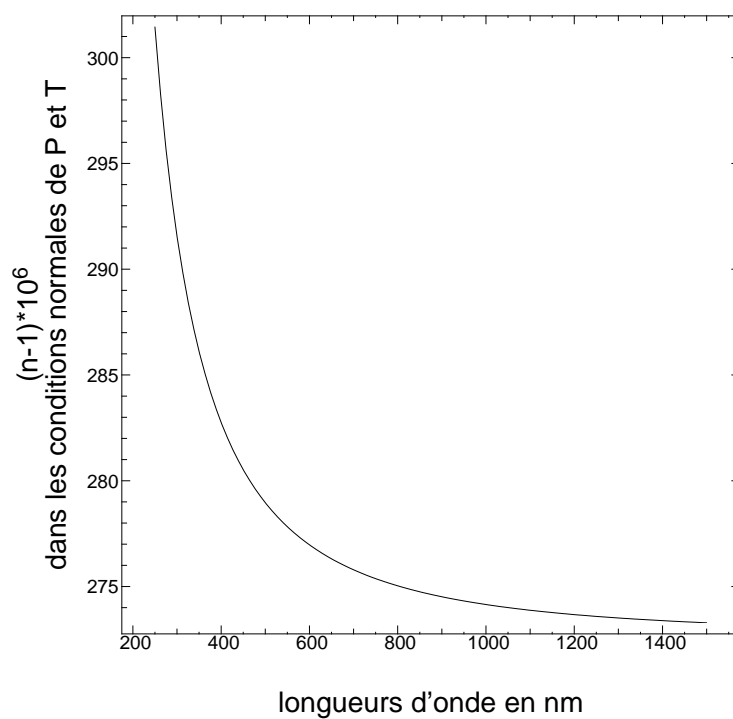


FIG. 4.1 – *Variations de l'indice de l'air avec la longueur d'onde.*

idéal est de  $\approx 300\text{nm}$  à  $\approx 1\mu\text{m}$ . En effet :

- au dessous de  $300\text{nm}$  le coefficient d'absorption de l'air devient très important, notamment à cause de la présence d'ozone.
- au-delà de  $1\mu\text{m}$  la variation de l'indice de l'air n'est plus très forte et l'absorption due à la vapeur d'eau est également importante.

Ce domaine spectral est quasiment couvert par les capteurs CCD, lorsque ceux-ci sont optimisés pour l'ultraviolet. Pour cette raison, le détecteur choisi est une caméra CCD Hamamatsu C4880 amincie, illuminée par la face arrière et recouverte d'un traitement fluorescent fournissant une plus grande sensibilité dans l'ultraviolet. Comme le montre la figure 4.2, le rendement quantique est supérieur à 50% entre  $300 \rightarrow 700\text{nm}$ .

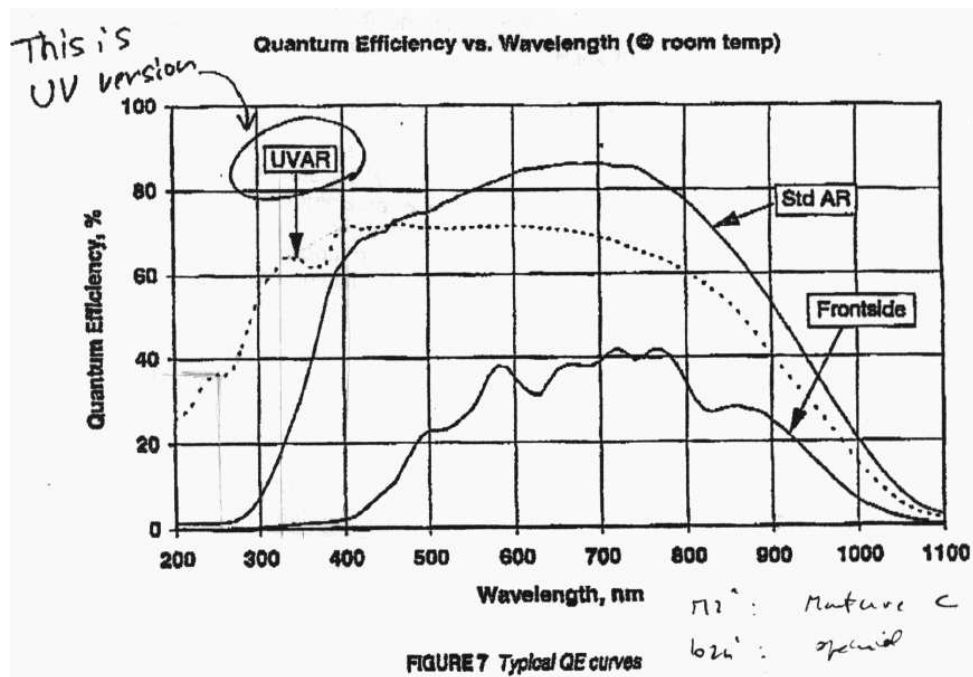


FIG. 4.2 – Rendement quantique de la caméra Hamamatsu C4880, version traitée UV. Le rendement quantique est défini comme le pourcentage de photons incidents qui créent un électron dans le silicium.

Ce domaine spectral permet également d'utiliser des matériaux et des traitements optiques courants pour le proche ultraviolet : l'optique réfractive est en silice fondue (transmission supérieure à 90% au dessus de  $300\text{nm}$ ) et les aluminures des miroirs protégées par une couche de  $\text{MgF}_2$ .

### 4.2.2 Configuration de l'expérience

Afin de limiter les vibrations, j'ai choisi de réaliser l'expérience MaTilD en propagation horizontale. La source et l'instrument sont alors fixés au sol. Les erreurs de suivi et les vibrations[46] des télescopes (introduisant un tilt achromatique) sont ainsi évitées.

Une mesure préalable<sup>2</sup> a montré que, sur le site de l'Observatoire de Lyon et pour une propagation horizontale d'une centaine de mètres,  $r_0 \approx 4 - 5\text{cm}$ . Ceci combiné au rapport de  $D/r_0 = 3 - 4$  préconisé par Fried conduit à un diamètre de pupille raisonnable pour l'instrument que j'ai choisi égal à  $150\text{mm}$ .

Dans le cas présent, la tache image aura une taille de  $\lambda/r_0 = 2''$  à  $500\text{nm}$ , l'écart type du tilt sera de :  $\sigma_\theta = 1''$  (voir l'équation (2.15)) et la tache d'Airy aura une taille de  $\lambda/D = 0,84''$ .

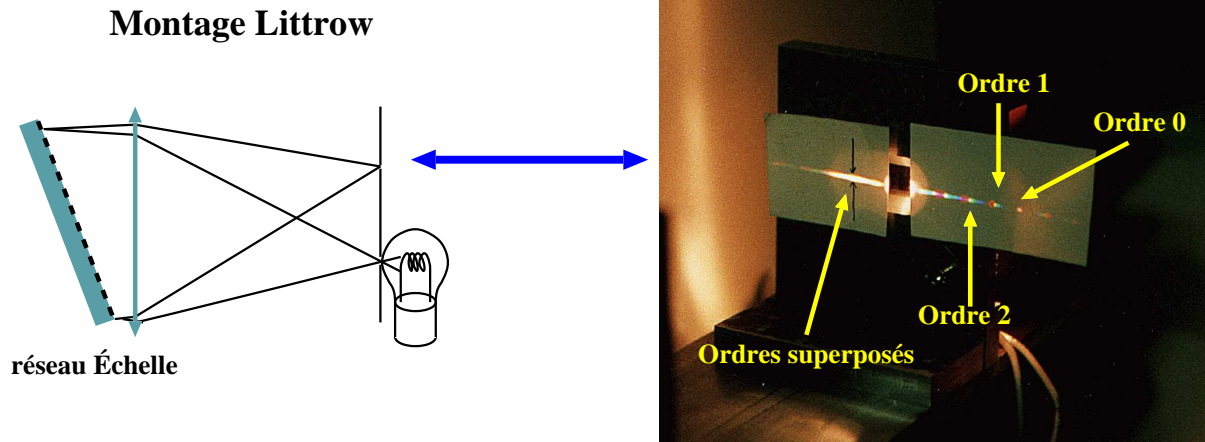
J'ai également choisi un schéma optique simple pour l'instrument afin de limiter le nombre de pièces optiques et les flexions mécaniques internes. Ceci m'a conduit à utiliser une source ponctuelle émettant plusieurs longueurs d'onde distinctes (voir le chapitre « Description de la source »); ainsi l'instrument n'a pas de sélection de longueur d'onde à effectuer; il s'agit simplement d'un imageur-disperseur (voir le chapitre « Description de l'instrument »)

#### Description de la source

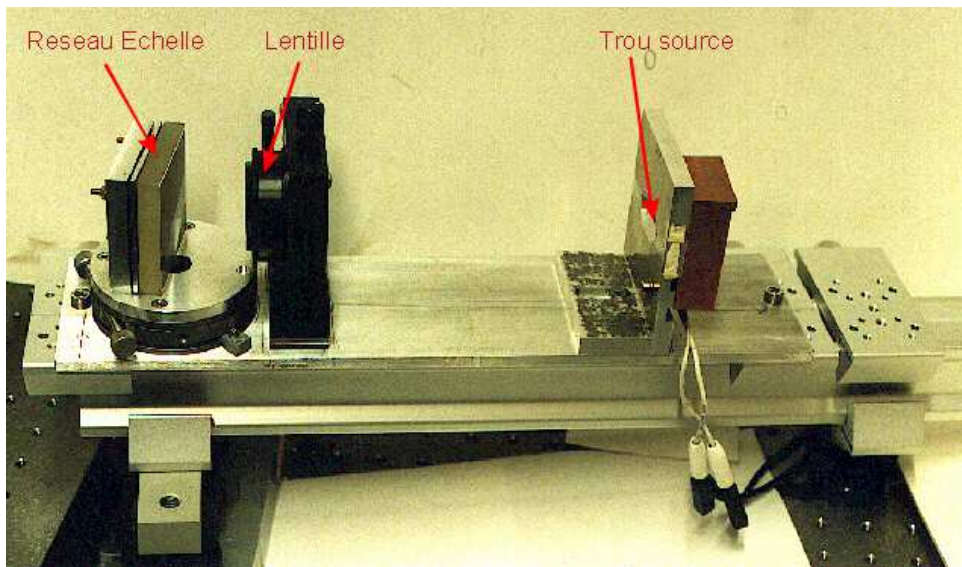
La source vue par l'instrument est un trou ponctuel émettant 4 à 5 longueurs d'onde sur le domaine spectral  $300 \rightarrow 700\text{nm}$ . Un tel spectre est obtenu en utilisant un réseau Échelle en montage Littrow (voir figure 4.4). On réalise alors un petit spectromètre que l'on utilise de façon particulière : le réseau travaille de façon à ce que les spectres d'ordres élevés se chevauchent (voir figure 4.3). Dans un monochromateur « classique », utilise l'ordre 1 : les autres ordres sont éliminés par un filtre passe haut appelé « sélecteur d'ordre ». Un trou (ou une fente) est placé en sortie du montage, celui-ci sélectionne une longueur d'onde dans le spectre de sortie. Ici, les ordres se chevauchent, il y a donc plusieurs spectres décalés en sortie et le trou sélectionne une longueur d'onde par ordre. Il y a donc autant de longueurs d'onde que d'ordres superposés.

---

<sup>2</sup>On observe une source ponctuelle (lampe) avec une pupille de diamètre variable (à l'aide de diaphragmes circulaires). On détermine alors la taille  $D$  de la pupille pour laquelle la turbulence n'introduit pas de déformation sur l'image[47], on a alors :  $D \approx r_0$ .

FIG. 4.3 – *Chevauchement des ordres en sortie d'un montage Littrow.*

Pour maximiser l'intensité en sortie de la source, les longueurs d'onde sélectionnées correspondent au maximum de chacun des ordres. Entre deux ordres successifs les longueurs d'onde sont dans le rapport  $\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} = \frac{i}{i+1}$  où  $i$  est le numéro de l'ordre.

FIG. 4.4 – *Source de l'expérience MaTILD*

Le système est constitué d'une lentille  $L$  de 20mm de diamètre et de 200mm de focale. Le réseau utilisé est un réseau en réflexion gravé (Jobin-Yvon) dont les caractéristiques sont les suivantes :

- angle de blaze  $\theta_b = 8^\circ 38'$



– nombre de traits par millimètre : 150, soit un pas de réseau de  $a = 6,67\mu m$ .

La longueur d'onde de blaze du réseau est alors  $\lambda_b = 2a \sin \theta_b = 2\mu m$ . Les longueurs d'onde centrales (correspondant au maximum des ordres) sont, pour le domaine spectral qui nous intéresse,  $\lambda = \{673, 500, 400, 333nm\}$ . La largeur spectrale de chaque raie est fixée par la taille des trous d'entrée  $\Phi_{entree}$  et de sortie  $\Phi_{sortie}$ . La largeur totale à mi-hauteur est donnée approximativement par :

$$\Delta\lambda = (\Phi_{entree} + \Phi_{sortie}) \frac{\lambda}{2f \tan \theta_b} \quad (4.1)$$

Soit  $\Delta\lambda = \{11, 8, 7, 6nm\}$ .

Il est intéressant de noter que, pour la source, l'angle solide utile (*i.e.*, celui sous lequel la pupille de l'instrument est vue) est faible :  $5'$  ( $150mm$  à  $100m$ ). Ceci correspond au niveau de la lentille collimatrice  $L$  à un faisceau de  $0,3mm$  de diamètre. Elle est surdimensionnée pour faciliter l'alignement de la source et de l'instrument : l'angle solide permis par le montage est l'angle sous lequel est vue la lentille depuis le trou d'entrée  $5,5^\circ$  d'angle au sommet (voir figure 4.5). En fait l'angle d'émission de la source est limité par la taille de la surface émettrice

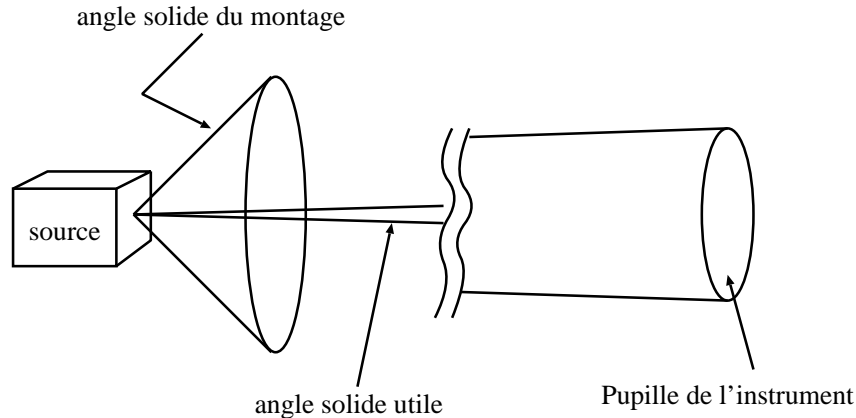


FIG. 4.5 – **L'angle solide de la source ( $5,5^\circ$ ) est plus important que l'angle solide utile ( $50'$ ) afin de faciliter l'alignement.**

de la lampe : c'est l'angle solide sous lequel est vue cette surface depuis le trou d'entrée de la source, soit  $50'$  (taille typique de l'arc de la lampe :  $1,5mm$  vue à  $10cm$ ). On voit d'ailleurs que le montage ne nécessite pas de collimateur : ce n'est pas l'éclairement<sup>3</sup> du trou d'entrée qui est

<sup>3</sup>puissance par unité de surface

critique, mais sa brillance<sup>4</sup>. Or celle-ci est égale à la luminance de la lampe (tant que la surface de la lampe est vue depuis le trou d'entrée sous un angle solide supérieur à l'angle solide utile).

La toute première version de la source utilisait une lampe tungstène halogène à enveloppe de quartz (lampe « QTH »). C'est cette version qui est photographiée figure 4.4. Mais le manque de flux dans l'ultraviolet m'a conduit à changer rapidement cette source par une lampe à arc au xénon prêtée par l'Observatoire de Paris. Cette lampe présente une luminance plus importante et quasiment constante sur le domaine 250 – 1  $\mu\text{m}$  (voir figure 4.6). Une modification mécanique

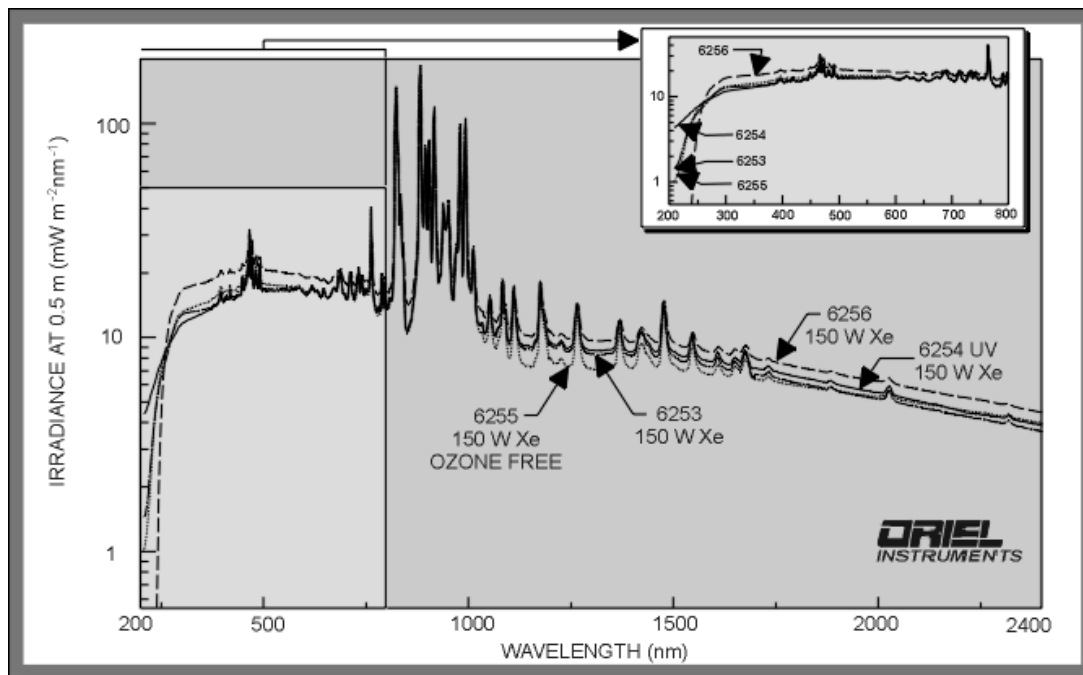


FIG. 4.6 – Spectre d'une lampe à arc haute pression au xénon (spectre tiré du catalogue Oriel), la lampe utilisée est du type 6256

de la source a alors été nécessaire. Étant donné l'encombrement de la lampe à arc au xénon (qui doit être dans un boîtier ventilé pour prévenir les risques en cas d'explosion), un miroir plan a été installé à la place de la lampe halogène. Il permet de couder le faisceau sortant du boîtier de la lampe à arc vers l'entrée de la source (voir figure 4.7).

La qualité des optiques n'est pas critique au niveau de la source : l'instrument voit uniquement le trou de sortie. La présence d'aberrations en amont (au niveau du collimateur) va

<sup>4</sup>énergie émise par unité d'angle solide et par unité de surface

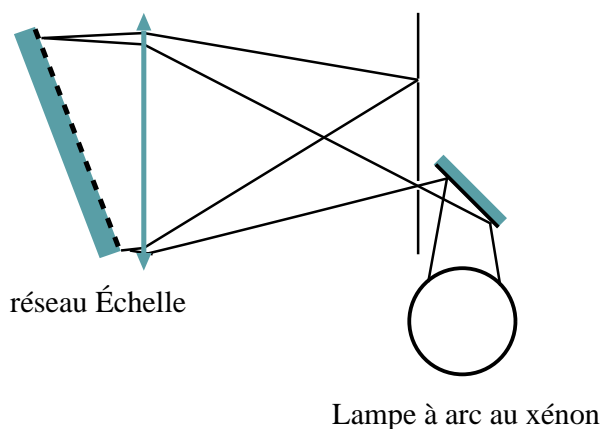


FIG. 4.7 – *Modification de la source pour permettre l'utilisation d'une lampe à arc au xénon.*

diminuer la luminance au niveau du trou de sortie en élargissant le spectre et en diminuant la résolution spectrale. Mais compte tenu de la très faible ouverture du faisceau, elles sont négligeables. C'est pourquoi la lentille utilisée pour la collimation du faisceau est plan convexe et le réseau utilisé est un réseau plan.

### Description de l'instrument

On dispose donc d'une source ponctuelle dont le spectre est constitué de raies. L'instrument doit remplir les fonctions de disperseur-imageur. Le dispositif que j'ai retenu comprend :

- un collimateur pour réduire la taille du faisceau et créer un grossissement suffisant pour permettre un échantillonnage satisfaisant des images.
- un élément disperseur pour séparer les différentes longueurs d'onde.
- un imageur pour former les images monochromatiques sur une caméra

Le spectre étant large et la qualité de l'optique étant ici critique, j'utilise un montage basé sur des miroirs pour ne pas introduire de chromatisme dans le montage (voir figures 4.8 et 4.9).

La fréquence d'échantillonnage spatial des images doit être au moins égale à la fréquence de coupure du signal ( $D/\lambda$ ). Il n'est en effet pas utile d'aller jusqu'à la fréquence de Shannon car on ne s'intéresse qu'au centre de gravité, c'est à dire à la fréquence 0 (ce point est développé au chapitre 5.1.1). Le repliement des fréquences spatiales (*aliasing*) dû à un sous-échantillonnage sera correctement modélisé dans le cadre de l'ajustement d'une carte de phase (voir chapitre 6).

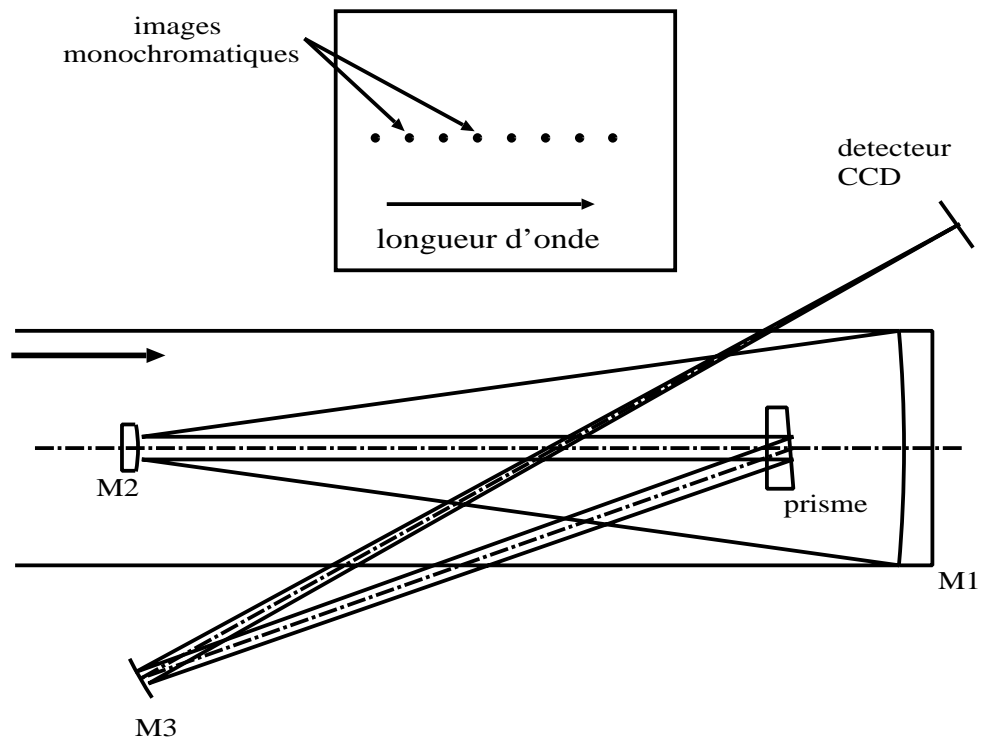


FIG. 4.8 – Schéma de principe de l'instrument : il est constitué d'un condenseur de faisceaux (miroirs M1 et M2), d'un prisme disperser pour séparer les longueurs d'onde (Pr) et d'un miroir imageur (M3).

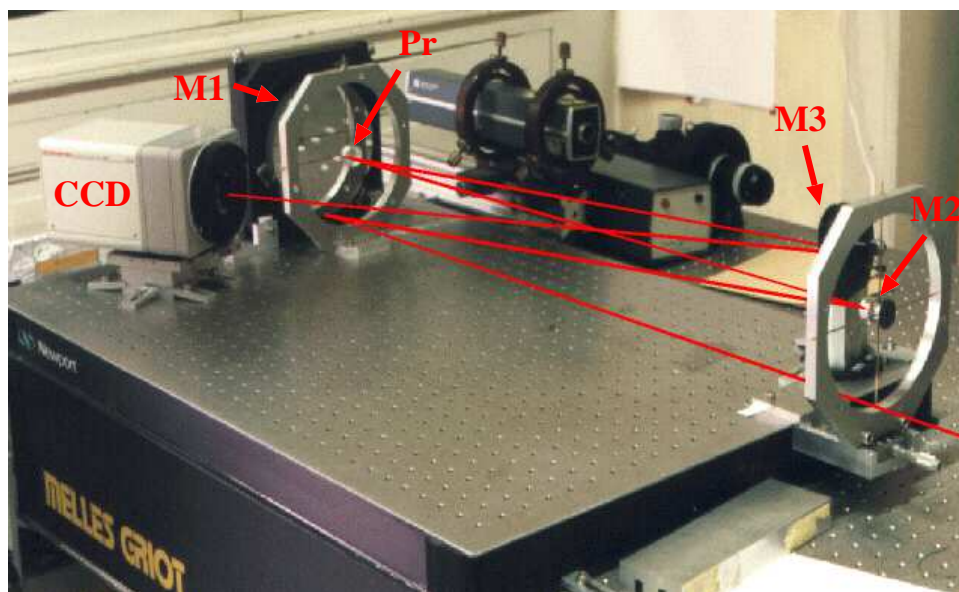


FIG. 4.9 – Photographie de l'instrument. On retrouve : le condenseur (miroir M1 et M2), le prisme (Pr), le miroir imageur (M3) et la caméra CCD.

La fréquence maximale du signal est  $D/\lambda_{min} = 600.10^3 \text{ arcsec}^{-1}$ , la fréquence d'échantillonnage étant de  $f/a$  (où  $f$  est la focale résultante de l'instrument et  $a$  la taille du pixel :  $a = 25\mu\text{m}$ ). Il faut donc une focale résultante de  $f_{res} = 15\text{m}$ .

Pour des raisons évidentes d'encombrement, la focale du miroir imageur (M3) est fixée à  $750\text{mm}$ , ce qui impose un grossissement  $G = 20$  pour obtenir une focale résultante correcte. Le miroir primaire (M1) est un miroir parabolique ouvert à  $f/D = 6$  pour être dans des dimensions standard. Le grossissement de  $G = 20$  est alors obtenu avec un miroir secondaire (M2) sphérique de focale  $f_2 = 45\text{mm}$ . Rigoureusement, ce miroir devrait être parabolique, mais les aberrations introduites par un miroir sphérique, dans cette configuration, sont faibles. De même le miroir (M3) est hors d'axe, mais l'aberration est également faible. Le rapport de Strehl théorique du montage complet est de 95% (Simulations effectuées à l'aide du logiciel de conception optique Zemax, voir figure 4.10).

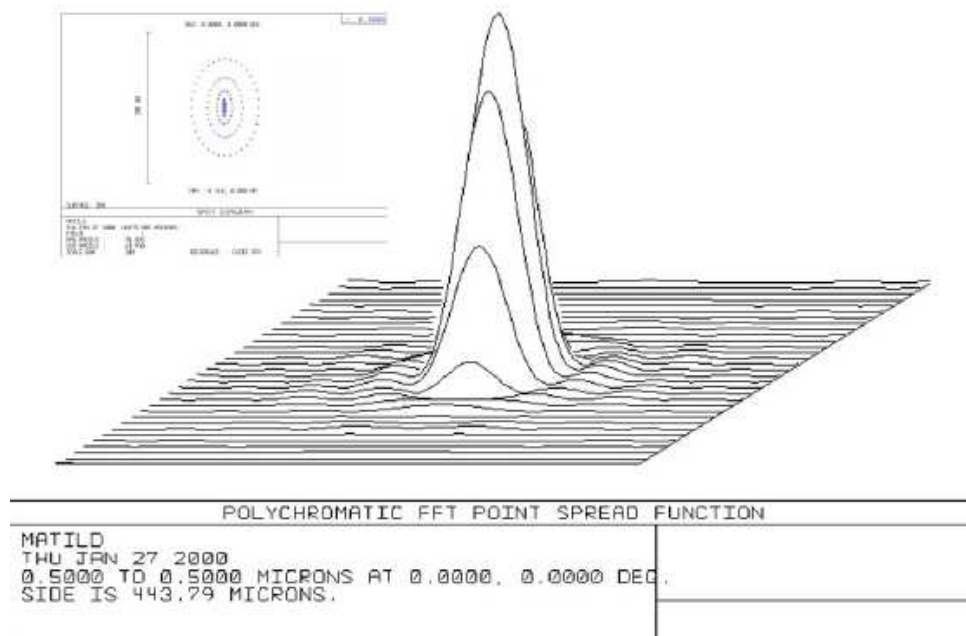


FIG. 4.10 – *Fonction d'étalement du point théorique du montage MaTiLD à 500nm obtenue à l'aide du logiciel de simulations optiques Zemax.*

Pour l'élément disperser j'ai choisi d'utiliser un prisme. En effet les matériaux optiquement transparents présentent généralement une dispersion plus importante dans le bleu que dans le rouge. Or les longueurs d'onde de la source sont plus séparées dans le rouge que dans le bleu (voir chapitre 4.2.2). Le prisme permet donc d'obtenir un intervalle similaire entre chaque image monochromatique. Le matériau retenu est la silice fondue car elle présente une bonne transmission dans l'ultra-violet (supérieure à 90% à partir de 300nm) et un chromatisme important (voir figure 4.11) :

$$n_{FuSi}^2 - 1 = \frac{0,6961663}{1 - (0,0684043/\lambda^2)^2} + \frac{0,4079426}{1 - (0,1162414/\lambda^2)^2} + \frac{0,8974794}{1 - (9,8966161/\lambda^2)^2} \quad (4.2)$$

J'ai choisi de plier le faisceau pour limiter l'encombrement de l'instrument. J'utilise donc

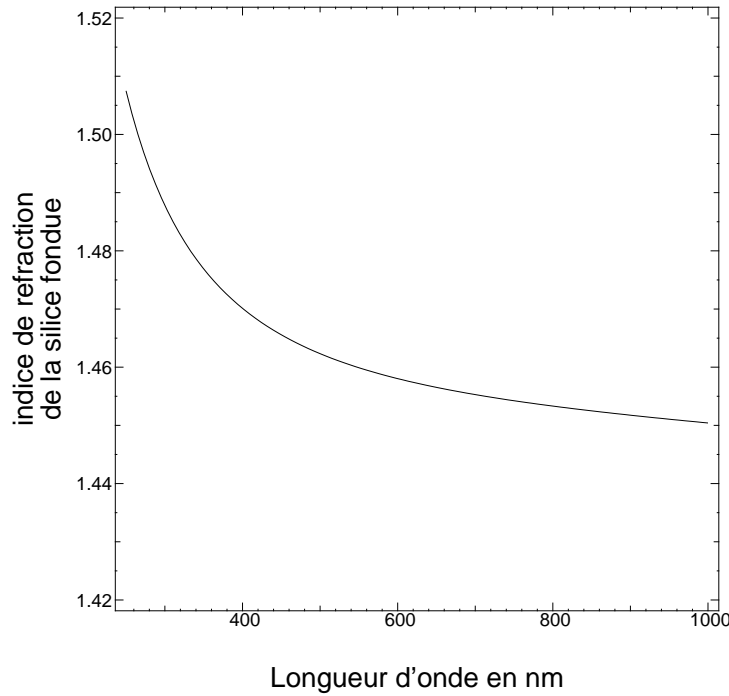


FIG. 4.11 – *Indice de réfraction de la silice fondue entre 250nm et 1μm*

un prisme à face arrière aluminée. Son angle est déterminé pour que les images formées sur le CCD soient les plus séparées possible (on dispose de  $512 \times 512$  pixels de  $25\mu m$  de côté soit une cible de  $12,8mm$  de côté). La déviation  $D$  d'un prisme d'angle  $\alpha$  aluminé sur la face arrière

pour un faisceau incident perpendiculaire à cette face est (voir figure 4.12) :

$$D_\lambda = \text{Arcsin} \left[ n_\lambda \sin \left[ 2\alpha - \text{Arcsin} \left( \frac{1}{n_\lambda} \sin(\alpha) \right) \right] \right] - \alpha \quad (4.3)$$

On peut ainsi déterminer l'angle au sommet du prisme qui permet de répartir au mieux les

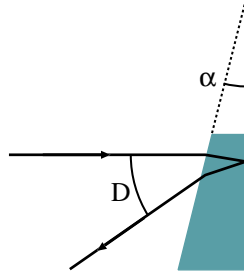


FIG. 4.12 – *Déviation du faisceau par un prisme aluminé sur la face arrière*

images dans la caméra.

### Description de l'acquisition

L'acquisition se fait à l'aide de la caméra Hamamatsu C4880. Afin de diminuer le courant d'obscurité<sup>5</sup>, cette caméra est refroidie par effet Peltier. Trois jonctions Peltier en série permettent de maintenir un écart maximal de température de 60°C entre le capteur et le circuit de refroidissement. Cette limite est donnée par le constructeur. En pratique, j'ai choisi de maintenir un écart de température inférieur à -55°C afin d'atteindre la température de consigne sans être limité par le matériel. Le rôle de ce circuit est d'évacuer les calories. Il est constitué d'un circuit fermé de liquide réfrigérant et d'un bloc assurant la circulation et le refroidissement de ce liquide. Le choix de ce dernier dépend de la température de fonctionnement de la caméra. Pour une température de fonctionnement supérieure à -50°C, de l'eau convient, celle-ci pouvant être maintenue à une température inférieure à 10°C. Pour des températures de fonctionnement plus faibles (en dessous de -55°C), l'eau n'est plus utilisable car la température du liquide de refroidissement doit être inférieure à 0°C. On peut alors utiliser un liquide alcoolisé.

<sup>5</sup>il s'agit des charges générées thermiquement, elles constituent un signal parasite qui diminue avec la température.

Cette caméra est pilotée par ordinateur via un module de contrôle Hamamatsu. Celui-ci vérifie le bon fonctionnement de la caméra et envoie vers celle-ci les signaux nécessaires à l'acquisition : déclenchement de l'obturateur, lecture de la caméra suivant le mode choisi (rapide, moyenne dynamique ou grande dynamique). Il transmet également vers l'ordinateur les images une fois celles-ci acquises. Il est à noter qu'un retard important dans le déroulement de la thèse est due à ce module. J'ai en effet été confronté à une panne qui se présentait aléatoirement et qui se traduisait par le blocage en position fermée de l'obturateur, le reste de la caméra fonctionnant parfaitement. La recherche de l'origine de cette panne a duré plusieurs mois et la caméra a été retournée deux fois au Japon sans succès, les recherches étant centrées sur l'obturateur. En fait, il s'est avéré que l'alimentation de la caméra (placée dans ce module) ne fonctionnait pas correctement : la tension de sortie s'effondrait de façon aléatoire. La puissance délivrée ne permettait pas à l'obturateur de s'ouvrir. De plus ce phénomène ne semble pas avoir été détecté au Japon, il est donc vraisemblablement lié à la nature du courant délivré par les prises secteur (la fréquence étant de  $60Hz$  au Japon contre  $50Hz$  en France). L'alimentation défectueuse a été mise en évidence au laboratoire d'électronique de l'Observatoire de Lyon. La solution temporaire choisie a été l'utilisation d'une alimentation stabilisée externe branchée en lieu et place de l'alimentation située dans le module Hamamatsu.

Le module de commande est contrôlé par un ordinateur (PC sous Windows 95). Le pilotage de la caméra se fait par l'intermédiaire d'un logiciel spécifique (HiPic) fourni par le constructeur. Ce logiciel permet l'acquisition sous forme de séquences d'images. Mais il ne permet pas le traitement de ces dernières. Celles-ci sont donc ultérieurement rapatriées vers une station de travail (PC sous Linux) et traitées à l'aide de logiciels que j'ai développés sous Yorick<sup>6</sup> (langage de programmation proche du C, analogue aux langages MatLab ou IDL). La première étape de ce traitement étant la lecture des images, j'ai développé un filtre permettant de lire les images au format HiPic sous Yorick. Les traitements sous développés dans les chapitres 5 et 6.

---

<sup>6</sup>ftp ://ftp-icf.llnl.gov/pub/Yorick/



## 4.3 Expériences et mesures

### 4.3.1 Première version de l'expérience MaTilD

Dans sa première version, la source émettait huit longueurs d'onde réparties dans un spectre allant de  $250nm$  à  $600nm$  ( $254nm$ ,  $313nm$ ,  $334nm$ ,  $365nm$ ,  $405nm$ ,  $436nm$ ,  $546nm$  et  $577$ ). L'instrument dispersait ces longueurs d'onde sur la largeur de la caméra. L'angle au sommet du prisme a alors été choisi égal à  $8^\circ$ , soit un écartement entre les longueurs d'onde extrêmes de  $10mm$ .

Mais cette répartition des images sur la caméra ne m'a pas permis d'obtenir des résultats satisfaisants : les images étant trop serrées, elles se chevauchent et ne permettent pas d'utiliser l'algorithme de traitement des centres de gravité (voir chapitre 5).

A ceci s'est ajouté un défaut optique du miroir primaire : la qualité optique de celui-ci ne correspondait pas aux spécifications données par le fabricant. Il était livré comme possédant une erreur par rapport à la surface parabolique théorique de  $\lambda/20(rms)$  ( $\lambda = 623.8nm$ ). Or un contrôle du miroir avec un appareil de Foucault donne une erreur de  $4\lambda(rms)$ . Ceci introduisait une déformation et un élargissement important des images qui accroissaient le phénomène de chevauchement (voir figure 4.13). De plus, l'intensité des longueurs d'onde en dessous de  $400nm$  est trop faibles. Les images correspondantes ne sont pas détectées.

### 4.3.2 Deuxième version de l'expérience MaTilD

Afin de corriger les défauts de la première version, un nouveau miroir primaire a été utilisé (prêté par l'équipe de l'instrument I2T de l'Observatoire de la Côte d'Azur). Le réseau de la source a également été changé afin de limiter le nombre de longueurs d'onde à quatre. J'utilise donc un réseau gravé à  $150 traits/mm$  avec un angle de blaze de  $8^\circ 38'$ , contre  $75 traits/mm$  précédemment. Les longueurs d'onde utilisées sont :  $337nm$ ,  $404nm$ ,  $505nm$  et  $673nm$  (le réseau est réglé en utilisant une lampe spectrale au mercure).

Au niveau de l'instrument, le prisme disperseur a été changé et la caméra tournée de  $45^\circ$  pour que les images soient réparties sur sa diagonale. On dispose alors d'un champ de  $18,1mm$  contre  $12,8mm$  auparavant. En tenant compte de la taille des images de l'ordre de 100 pixels,

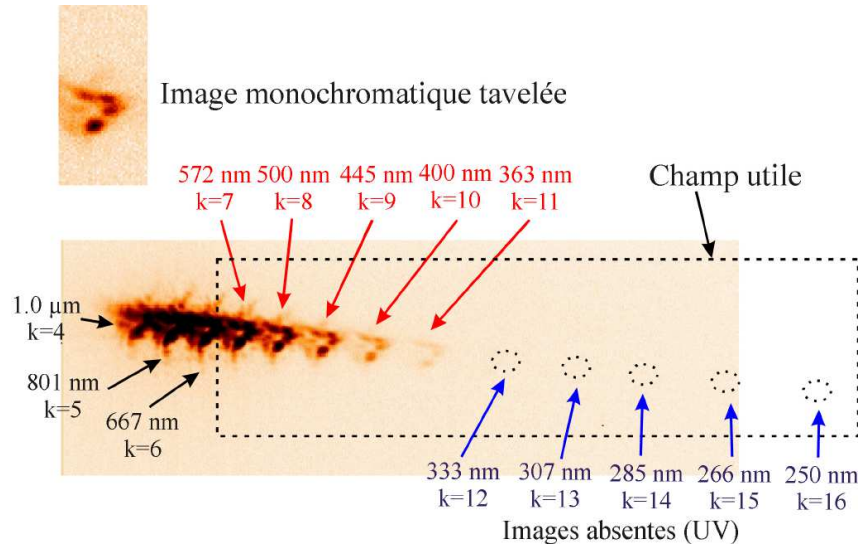


FIG. 4.13 – Image typique obtenue par la première version de l'expérience MaTilD.

on obtient une séparation maximale admissible pour les images de 14,6 mm. Le nouveau prisme a un angle au sommet de  $17^\circ$ , soit une distance entre les deux longueurs d'onde extrême de 13,5 mm (voir figure 4.14).

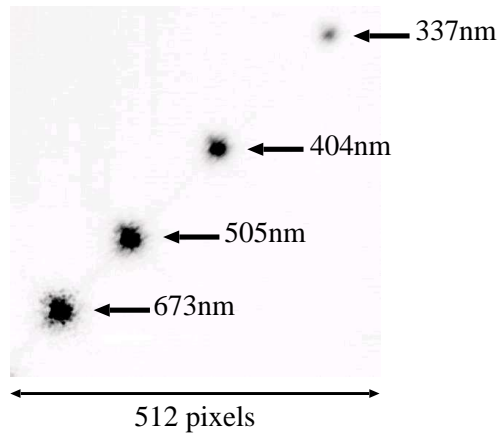


FIG. 4.14 – Image typique obtenue par la deuxième version de l'expérience MaTilD.

### Disposition de l'expérience

La disposition de l'expérience (dans sa deuxième version) a permis d'utiliser l'instrument dans de bonnes conditions, c'est-à-dire avec  $r_0 \approx 4 - 5\text{ cm}$  et une échelle externe suffisamment

importante pour ne pas atténuer le tilt détecté (voir chapitre 2.3.2). J'ai choisi de placer la source en haut du château d'eau de l'Observatoire de Lyon et l'instrument au premier étage du bâtiment Électronique, situé à une centaine de mètres du château d'eau comme le montre la figure 4.15.

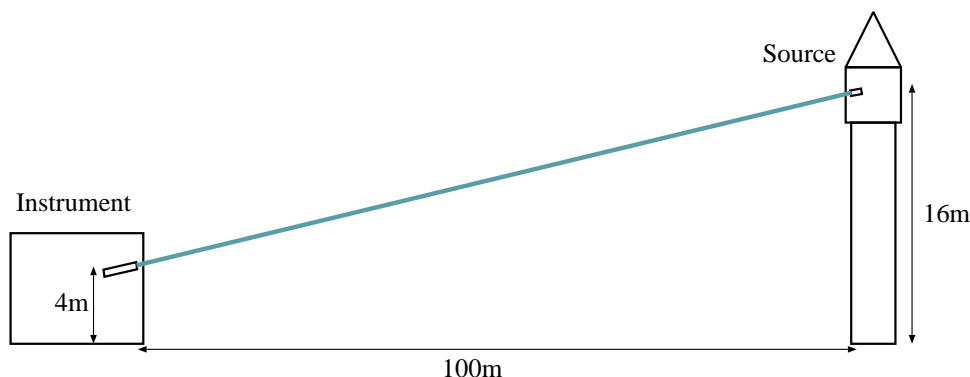


FIG. 4.15 – **Disposition de l'expérience : la source est placée au sommet d'une tour de 16m de hauteur et l'instrument dans un bâtiment à 4m de hauteur. Ces deux bâtiments sont distants de 100m.**

Une telle configuration assure une élévation du faisceau lumineux de plusieurs mètres. L'échelle externe de la turbulence doit donc être de l'ordre de quelques mètres. Étant donné la taille de la pupille (150mm), le tilt ne doit pas être affecté par cette échelle externe finie. C'est ce que j'ai vérifié sur les données obtenues en comparant le paramètre de Fried mesuré à partir de la variance des angles d'arrivée et la valeur obtenue par ajustement du « pic basses fréquences<sup>7</sup> » de la fonction de transfert speckle. Les valeurs sont alors identiques et le  $r_0$  typique est de 3 à 4cm. Une différence de résultats obtenus par les deux méthodes de mesure du paramètre de Fried indiquerait un effet notable de l'échelle externe. Ce fut le cas lors des mesures effectuées avec la première version de l'expérience. L'instrument et la source étaient disposés proches du sol, l'altitude du faisceau était alors comprise entre 0 à 2m. J'ai alors constaté, sur les mesures, que l'angle d'arrivée était fortement atténué par rapport à l'effet de la turbulence sur l'éclatement des images. J'ai comparé le paramètre de Fried estimé à partir de l'agitation des images (voir équation (2.15)) et celui obtenu par l'ajustement du pic basses fréquences de la fonction de transfert speckle par le modèle de Roddier (voir équation (2.20)). La différence est énorme puisque le premier est d'environ 1m et le second d'environ 1cm. J'ai ensuite utilisé

<sup>7</sup>partie de la fonction de transfert speckle pour les basses fréquences spatiales [8], voir (2.20)

le modèle de Bognino *et al.* (voir équation (2.18)) pour estimer l'échelle externe rendant compte de cette atténuation. Celle-ci est d'environ 30cm ce qui est compatible avec la faible altitude du faisceau (1 à 2m). L'écart entre les deux estimation du  $r_0$  était également accentué par la mauvaise qualité du miroir primaire qui augmentait l'étalement de l'image tavelée, réduisant le  $r_0$  estimé par l'ajustement du modèle de Roddier. L'échelle externe réelle est donc probablement supérieure à 30cm mais elle reste tout de même suffisamment petite pour que l'atténuation des angles d'arrivée soit très importante ( $\sigma_m \approx 0,1''$  contre  $1''$  attendu).

Dans la suite, je ne considère plus que les mesures effectuées avec la deuxième version de l'expérience MaTilD.

## 4.4 Protocole de mesure et pré-traitement des images

Le protocole de mesure qui a été suivi est lié au prétraitement des images. Par pré-traitement, je désigne l'ensemble des traitements effectués sur les images qui sont indépendants de l'algorithme utilisé pour mesurer le tilt différentiel. Il me semble donc important de préciser dès à présent quels sont ces traitements, avant d'entrer plus en détails dans le protocole de mesure.

### 4.4.1 Prétraitement des images

Ces prétraitements sont appliqués aux images afin de corriger les effets indésirables liés à la détection par les capteurs CCD.

Je considère ici que les pixels répondent linéairement au nombre de photons  $N_{ph}$  incidents<sup>8</sup>. C'est à dire que la tension en sortie CCD (*i.e.*, le signal) est donnée par :

$$V_{pixel} = aN_{ph} + c \quad (4.4)$$

Pour remonter au nombre de photons, il faut connaître les quantités  $a$  et  $c$ . Or ces valeurs ne sont pas uniformes sur le détecteur, il est donc nécessaire de cartographier le CCD.

La carte de sensibilité  $a$  est due à l'efficacité quantique du pixel (*i.e.*, le facteur de conversion

---

<sup>8</sup>la non-linéarité des capteurs CCD est faible. Toutefois le fabricant ne donne aucune valeur

entre le nombre de photons incidents et le nombre d'électrons « générés »<sup>9</sup>). Cette sensibilité varie généralement lentement sur la surface du CCD, mais peut présenter des accidents comme par exemple un pixel mort (*i.e.*, qui est pas ou beaucoup moins sensible que les autres), ou bien un court-circuit entre deux pixels. On a alors généralement un pixel mort à côté d'un pixel brillant (excédant de signal venant de son voisin). Ces variations sont regroupées sous le terme de PRNU (*Photon Response Non-Uniformity*). Pour déterminer les non-uniformités de sensibilité des pixels, un éclairage uniforme est nécessaire (toute non-uniformité sera due au pixel), on parle alors de champ plat (ou *flat-field*). Une moyenne de plusieurs images permet de diminuer le bruit de lecture (voir chapitre 5.1.1)

Le terme  $c$  correspond à la valeur des pixels en l'absence d'éclairage, elle est due d'une part à un offset fixé par le constructeur, d'autre part par la génération thermique d'électrons lors du temps de pose. La variation spatiale de ce terme peut être plus rapide que la sensibilité. Des différences significatives d'un pixel à l'autre sont observables. Ici les accidents sont des pixels « chauds », c'est à dire des pixels qui présentent un fort courant d'obscurité. Le terme chaud vient du fait que le courant d'obscurité est d'origine thermique et augmente avec la température. Les non uniformités de courant d'obscurité sont désignées par DSNU (*Dark Signal Non-Uniformity*). Pour corriger ces non uniformités, il faut disposer d'images prises en l'absence d'éclairage (champ obscur ou *dark field*). Un moyennage de ces images permet, comme pour la sensibilité, de diminuer le bruit de lecture (voir chapitre 5.1.1).

Le prétraitement des images consiste donc à inverser l'équation (4.4). La détermination du coefficient  $a$  se fait en utilisant la moyenne des champs plats ( $\tilde{V}_{cp}$ ), la moyenne des champs obscurs ( $\tilde{V}_{co}$ ) ainsi que la donnée du constructeur qui est la sensibilité moyenne du CCD  $\tilde{a}$ . On déduit alors la carte de sensibilité du CCD par :

$$a = \frac{\tilde{V}_{cp} - \tilde{V}_{co}}{\widetilde{\tilde{V}_{cp} - \tilde{V}_{co}} / \tilde{a}} \quad (4.5)$$

Où  $\widetilde{\tilde{V}_{cp} - \tilde{V}_{co}}$  est la valeur moyenne (sur toute l'image) de la différence entre les moyennes des champs plats et obscurs.

---

<sup>9</sup>l'électron n'est pas généré au sens propre du terme, mais le photon incident lui donne une énergie suffisante pour passer de la bande de valence à la bande de conduction. Ce sont les électrons libres que l'on détecte

Le terme  $c$  est simplement la moyenne des champs plats :

$$c = \tilde{V}_{co} \quad (4.6)$$

On peut alors obtenir le nombre de photons pour chaque pixel grâce à l'équation :

$$N_{ph} = \frac{V_{pixel} - c}{a} \quad (4.7)$$

C'est ce traitement qui est appliqué sur chaque image de l'expérience MaTilD avant l'utilisation des algorithmes de calcul du tilt.

À ce prétraitement, peut s'ajouter une suppression des pentes le long des lignes et des colonnes. Ces pentes aléatoires sont dues aux dérives des composants électroniques de la caméra pendant la lecture. Toutefois cette correction n'est pas indispensable, car dans le cas de la caméra Hamamatsu, ces pentes sont très faibles, la correction peut alors être plus bruyante que l'image originale. L'effet de ces pentes n'est pas sensible au niveau du calcul du centre de gravité : aucune différence n'a été trouvée sur les résultats obtenus avec et sans correction des pentes. Aucune correction de pente n'a donc été effectuée sur les images traitées.

#### 4.4.2 Mode opératoire des mesures

Je décris ici en détails le mode opératoire suivi lors de la deuxième série de mesures et avec le module de contrôle de la caméra réparée (voir chapitre 4.2.2).

##### 1. Alignement entre la source et l'instrument :

- (a) Sur l'instrument un laser est monté en sens inverse : le faisceau passe par le miroir M3, le prisme, le miroir M2 et le miroir M1 pour ressortir sur l'axe de l'instrument et pointer vers la source.
- (b) L'instrument est orienté pour que le faisceau laser soit centré sur l'entrée de la source.
- (c) La source est orientée pour aligner son axe avec celui du faisceau laser. Un réglage plus fin est effectué une fois la source allumée en maximisant le flux collecté par la caméra.

## 2. Mise en route de l'expérience :

### – La source :

- (a) Allumage de la lampe à arc au xénon
- (b) Alignement de la lampe sur l'axe de la source par l'intermédiaire du miroir plan.
- (c) Alignement fin de la source sur l'axe de l'instrument : on recherche le flux maximal au niveau de l'instrument

### – L'instrument :

- (a) Mise en route de l'ordinateur de commande et lancement du logiciel HiPic.
- (b) Mise en route du circuit de refroidissement et choix de la température de consigne ( $5^{\circ}\text{C}$ ) : l'écart entre la température de consigne et la température du capteur CCD devant être inférieur à  $55^{\circ}\text{C}$ .
- (c) Allumage de l'alimentation stabilisée externe.
- (d) Allumage du module de contrôle.
- (e) Choix de la température de refroidissement de la caméra dans le logiciel HiPic :  $-50^{\circ}\text{C}$ .
- (f) Attente de la stabilisation de la température du capteur.

## 3. Acquisition d'une séquence de champs obscurs.

## 4. Acquisition d'une séquence d'images.

## 5. Acquisition d'une séquence de champs obscurs.

## 6. Acquisition d'une séquence de champs plats obtenus en éclairant directement la caméra avec un éclairage uniforme créé par deux diffuseurs placés dans un faisceau lumineux collimaté.

Afin d'étudier l'effet du temps de pose sur le rapport signal sur bruit pour la mesure des angles d'arrivée (voir chapitre 5.1.3), deux types d'acquisitions ont été effectués : tout d'abord avec un temps de pose minimal afin de geler au mieux la turbulence, puis avec un temps de pose le plus long possible afin d'augmenter le flux collecté.

Lors de la série de mesure, j'ai tout d'abord acquis une séquence (étapes 3 à 6) avec un temps de pose de  $20\text{ms}$ , puis une séquence avec un temps de pose de  $60\text{ms}$  et une deuxième

séquence avec un temps de pose de  $20ms$ . Cette deuxième acquisition se justifie par le fait que la température a baissé de  $5^{\circ}C$  en deux heures (entre la première et la deuxième séquence). De plus la première séquence d'acquisitions s'est déroulée seulement deux heures après le coucher du soleil, on peut alors s'attendre à une turbulence non stabilisée.





# Chapitre 5

## Estimation des angles d'arrivée

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Estimation du rapport signal sur bruit . . . . .</b>	<b>70</b>
5.1.1	Bruits et biais affectant la mesure du centre de gravité . . . . .	71
5.1.2	Rapport signal sur bruit attendu . . . . .	81
5.1.3	Évolution du rapport signal sur bruit avec le temps de pose . . . . .	83
<b>5.2</b>	<b>Mesures des angles d'arrivée sur les données MaTilD . . . . .</b>	<b>87</b>
<b>5.3</b>	<b>Simulations . . . . .</b>	<b>98</b>
5.3.1	Modèles des images . . . . .	98
5.3.2	Comparaison avec les mesures . . . . .	100
<b>5.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>102</b>

---

Dans ce chapitre consacré à l'estimation des angles d'arrivée par la mesure du centre de gravité des images monochromatiques, j'étudie l'effet des bruits issus du capteur CCD sur la précision des résultats (chapitre 5.1). Cette étude théorique m'a permis de prédire que la mesure différentielle des angles d'arrivée est possible avec l'expérience MaTilD, bien que difficile en raison du faible rapport signal sur bruit. Mais la mesure est nettement plus bruitée que ne le prédit le calcul analytique (chapitre 5.2). J'ai alors cherché l'origine de ces bruits dans les effets

non prédictibles analytiquement. J'ai simulé des images le plus fidèlement possible, puis j'ai appliqué le traitement de calcul du centre de gravité sur ces simulations (chapitre 5.3). Les simulations ont permis de quantifier l'effet de ces bruits. Toutefois, les mesures restent plus bruitées que les simulations (chapitre 5.4).

## 5.1 Estimation du rapport signal sur bruit

Le centre de gravité est un bon estimateur (*i.e.*, non biaisé) de l'angle d'arrivée uniquement dans le cas idéal : sans échantillonnage et sans bruit. En réalité le plan image est tronqué (taille finie des détecteurs), échantillonné (taille non-nulle des pixels) et l'image est bruitée (bruit du capteur, par exemple bruit de lecture). Je vais étudier les effets de ces différentes limitations sur l'estimateur pour déterminer le rapport signal sur bruit de la mesure dans le cas de l'expérience MaTILD.

Le centre de gravité, dans une direction  $x$ , d'une image dont la répartition d'intensité est  $\mathfrak{I}(x,y)$  est défini par :

$$x_0 = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} x \cdot \mathfrak{I}(x,y) dx dy}{\iint_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{I}(x,y) dx dy} \quad (5.1)$$

On peut voir ceci comme le moment d'ordre 1 de la projection de l'intensité sur la direction  $x$  :

$$\begin{aligned} x_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{I}(x,y) dy}{\iint_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{I}(x,y) dx dy} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \end{aligned} \quad (5.2)$$

En réalité on n'a pas accès directement à l'intensité  $\mathfrak{I}$ , mais à un estimateur qui est l'intensité fenêtrée (le capteur a une taille finie), échantillonnée (par les pixels), digitalisée (nombre de bits sur lequel est codée l'intensité) et bruitée. Tout ceci va se traduire sur l'estimateur du centre de gravité sous la forme de bruits ou de biais.

### 5.1.1 Bruits et biais affectant la mesure du centre de gravité

Je m'intéresse tout d'abord à l'estimateur réel et j'énumère de façon la plus exhaustive possible les origines des bruits et des biais affectant cette mesure puis j'étudie quantitativement leurs effets.

- ***bruit de photons***. Ce bruit est indépendant du détecteur et constitue la limite physique de la mesure. Il vient de la nature corpusculaire des photons qui arrivent de façon aléatoire sur le CCD. Il suit une statistique poissonnienne. Dans le cas de la mesure du centre de gravité, plus le nombre de photons est important plus le rapport signal sur bruit est élevé).
- ***bruits additifs*** : Je désigne par bruits additifs les bruits décorrélés du signal et qui s'ajoutent à ce dernier ; leur effet sur l'estimation du centre de gravité est identique et sera donc traité globalement. Ces bruits sont :
  - ***bruit de lecture***. Ce bruit se produit au cours du transfert des charges lors de la lecture du capteur CCD : quelques charges ne sont pas transférées et restent piégées dans les pixels (s'ajoutant ainsi au signal du pixel suivant). Cette erreur se traduit par un bruit aléatoire sur le nombre d'électrons en sortie du CCD (donc sur l'intensité du pixel). Ce bruit est bien décrit par une variable aléatoire de statistique gaussienne. Cette approche est justifiée par le nombre élevé de transferts (on est alors dans les conditions d'application du théorème central limite<sup>1</sup>).
  - ***courant d'obscurité***. Ce bruit est dû à la génération thermique de charges au niveau de chaque pixel. La génération de ces charges est similaire à celle due aux photons, ce bruit suit donc la même statistique (poissonnienne). Le nombre moyen de charges générées :  $\mu_{obs}$  dépend de la température (il double tout les 8°C typiquement) et du temps de pose. Sa variance est  $\sigma_{obs}^2 = \mu_{obs}$ .
  - ***bruit de numérisation***. Ce bruit est dû au nombre fini de niveaux du convertisseur analogique-numérique. La tension de sortie du CCD n'est alors connue qu'à un demi-niveau près.
  - ***bruit d'échantillonnage spatial***. L'image qui se forme sur le CCD est échantillonnée par les pixels : l'intensité est moyennée sur la taille d'un pixel. Cet échantillonnage (même

---

<sup>1</sup>la somme de variables aléatoires indépendantes tend vers une statistique gaussienne

dans les conditions de Shannon) introduit un biais sur la mesure du centre de gravité : on ne connaît pas la position d'un photon incident à mieux qu'un demi-pixel près.

- **non homogénéité du CCD** : voir le chapitre 4.4.1. J'étudie l'effet de l'utilisation d'une estimation bruitée de la carte de sensibilité et de courant d'obscurité du capteur sur la mesure de l'intensité et donc du centre de gravité.
- **bruits liés au traitement du signal** :
  - fenêtrage de l'image. Le fenêtrage de l'image pour le calcul du centre de gravité introduit un biais qui varie suivant la taille relative de la fenêtre par rapport à celle de l'image, mais également suivant la forme même de l'image. Ce bruit n'est donc pas stationnaire lors du traitement d'une séquence.
  - chevauchement des images : cette erreur est due au fait que plusieurs images monochromatiques se trouvent sur la même trame. L'intensité des images voisines se chevauchent. Cette intensité parasite sera prise en compte dans l'estimation du centre de gravité. L'erreur introduite dépend de la forme des images et de la distance entre celles-ci : plus elles sont séparées, moins elle est importante. Cette erreur n'est pas non plus stationnaire lors du traitement d'une séquence.

## Effet du bruit de photons

Ce bruit est dû à la nature corpusculaire des photons et à leur arrivée aléatoire sur le détecteur. Le temps de pose étant fini, le nombre de photons l'est aussi et suit une loi poissonnienne. Le premier effet est que pour un flux constant le nombre de photons par image va fluctuer autour de la moyenne ( $N_{ph}$ ) avec une écart type égal à  $\sqrt{N_{ph}}$ . Cependant ceci n'intervient pas sur la mesure du centre de gravité d'une image. En effet son calcul est normalisé par l'intensité totale de l'image. Le second effet est que les photons vont se répartir aléatoirement sur le détecteur (en suivant toutefois la distribution spatiale de l'intensité). C'est cette répartition aléatoire que l'on désigne par bruit de photons.

Le centre de gravité de l'image est, comme son nom l'indique, le barycentre des coordon-

nées des photons sur le CCD notées  $x_i$  :

$$\tilde{x}_0 = \frac{1}{N_{ph}} \sum_{i=1}^{N_{ph}} x_i \quad (5.3)$$

Le nombre de photons ici utilisé,  $N_{ph}$ , est le nombre total de photons dans l'image considéré. Ce sont les coordonnées  $x_i$  qui sont des variables aléatoires. Elles suivent la loi de Poisson dont la moyenne est l'intensité au point considéré. Pour une seule direction (ici l'axe des  $x$ ), la densité de probabilité est donc l'intensité projetée normalisée sur cette direction : c'est la densité de probabilité  $f(x)$  définie à l'équation (5.2). La moyenne de l'estimateur  $\tilde{x}_0$  est alors donnée par :

$$\langle \tilde{x}_0 \rangle = \frac{1}{N_{ph}} \sum_{i=1}^{N_{ph}} \langle x_i \rangle \quad (5.4)$$

Or la densité de probabilité des  $x_i$  est le moment d'ordre 1 de la fonction  $f(x)$ , elle est identique pour tous les  $x_i$  :

$$\langle \tilde{x}_0 \rangle = M_1[f(x)] \quad (5.5)$$

Le moment d'ordre  $n$  d'une fonction étant défini comme suit :

$$M_n[f] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx \quad (5.6)$$

D'après (5.2),  $x_0 = M_1[f(x)]$  ; on a donc égalité entre la moyenne de l'estimateur et le centre de gravité. Cet estimateur n'est pas biaisé par le bruit de photons.

Je m'intéresse maintenant à la variance de  $\tilde{x}_0$ . Elle est définie par :

$$\text{Var}(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = M_2[x] - M_1^2[x] \quad (5.7)$$

Elle se calcule comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{x}_0) &= \frac{1}{N_{ph}} \sum_{i=1}^{N_{ph}} \text{Var}(x_i) \\ &= \frac{1}{N_{ph}} M_2[f(x)] \end{aligned} \quad (5.8)$$

Elle n'est pas nulle, l'estimateur est donc bruité. Il est important de remarquer que la variance de  $\tilde{x}_0$  due au bruit de photons est égale à la variance de  $f(x)$  divisée par le nombre de photons.

On retrouve ici le résultat classique pour une distribution de statistique gaussienne avec un nombre fini d'échantillons : la précision sur la mesure de la moyenne est égale à la largeur de la gaussienne (ici la tache image) divisée par la racine carrée du nombre d'échantillons, ce qui dans notre cas s'écrit :  $\sigma_{image} / \sqrt{N_{ph}}$ .

Pour l'expérience MaTilD, la largeur des images est donnée par  $\lambda / r_0$  soit environ 10 *pixels* (pour  $\lambda = 500nm$ ,  $r_0 = 3cm$ ). Le tilt à mesurer est approximativement de 5 *pixels*, soit un tilt différentiel compris entre 0,20 et 0,05 *pixel*. Il faut donc plus de 40000 photons par image monochromatique pour un rapport signal sur bruit de 1. Ce nombre est important, ce qui justifie l'utilisation d'une lampe à forte brillance comme la lampe à arc xénon. Sur les données MaTilD, avec 20ms de temps de pose, le nombre moyen de photons détectés par images est : 1 300 000, 1 000 000, 420 000 et 92 000 respectivement pour 673nm, 505nm, 404nm et 337nm. Le bruit de photons est donc significatif dans l'ultra-violet, là où le flux est le plus faible.

### Effet de l'échantillonnage spatial

Dans l'étude du bruit de photons on a considéré l'intensité de l'image  $\mathfrak{I}(x, y)$  et la fonction de répartition associée  $f(x)$ . Or le capteur ne fournit pas cette intensité mais à sa valeur échantillonnée par les pixels  $(i, j)$ . Dans cette partie, je m'intéresse donc à l'effet de l'échantillonnage sur la fonction  $f$ . Le résultat obtenu permettra de corriger l'équation (5.8) pour obtenir l'effet du bruit de photons dans le cadre d'un détecteur pixelisé sur l'estimation du centre de gravité. Tout d'abord considérons cette intensité échantillonnée  $I_{i,j}$  :

$$I_{i,j} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \mathfrak{I}(x, y) dx dy \quad (5.9)$$

Ceci peut être vu comme la convolution de l'intensité par la fonction «pixel»  $h(x, y)$  :

$$I_{i,j} = (\mathfrak{I} * h)(i\Delta x, j\Delta y) \quad (5.10)$$

avec  $h(x, y)$  définie comme suit pour un pixel de taille  $\Delta_x \times \Delta_y$  et de sensibilité uniforme (c'est le cas que je considère dans la suite) :

$$h(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left| \frac{x}{\Delta_x} \right| < \frac{1}{2} \text{ et } \left| \frac{y}{\Delta_y} \right| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.11)$$

En réalité, la réponse à l'intérieur des pixels n'est pas uniforme[48], la fonction pixel est égale à la sensibilité relative à l'intérieur du pixel. Par contre elle semble peu varier d'un pixel à un autre. Mais au premier ordre, cette non uniformité introduit un décalage global du centre des pixels. Ceci se traduit sur les mesures par un changement d'origine, sans conséquence sur les mesures des angles d'arrivée. En effet, la moyenne temporelle des angles d'arrivée étant nulle, je soustraits à la mesure de position la moyenne sur les trame.

Je définis alors la fonction échantillonnée  $f_k$  par :

$$f_k = (f * h)(x) \times \delta(x - k\Delta x) = (f * h)(x - k\Delta x) \quad (5.12)$$

Dans l'étude du bruit de photons, on a vu que les calculs du centre de gravité et de sa variance font appel aux moments d'ordre 1 et 2 de la fonction  $f$ . Il faut donc calculer la valeur des moments d'ordre 1 et 2 de la fonction  $f_k$ . Pour cela, il est intéressant d'utiliser la propriété de la transformée de Fourier reliant le moment d'ordre  $n$  d'une fonction et la dérivée à l'origine de sa transformée de Fourier :

$$M_n[f] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx = \left( \frac{i}{2\pi} \right)^n \frac{\partial^n \hat{f}(v)}{\partial v^n} \Big|_{v=0} \quad (5.13)$$

Ici  $\hat{f}(v)$  désigne la transformée de Fourier de la fonction  $f(x)$ . Le moment d'ordre 1 de  $f_k$  est alors :

$$\begin{aligned} M_1[f_k] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\Delta x \cdot f_k = \frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( [\hat{f}'\hat{h} + \hat{f}\hat{h}'] \left( \frac{k}{\Delta x} \right) \right) \\ &= \frac{i}{2\pi} \left( \hat{f}'(0) + \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k \Delta x}{k} \hat{f} \left( \frac{k}{\Delta x} \right) \right) \\ &= M_1[f] + \frac{i}{2\pi} \left( \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k \Delta x}{k} \hat{f} \left( \frac{k}{\Delta x} \right) \right) \\ &= x_0 + \frac{\Delta x}{\pi} \sum_{k > 0} \frac{(-1)^{k+1} \Delta x}{k} \text{Im} \left[ \hat{f} \left( \frac{k}{\Delta x} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.14)$$

Le dernier terme s'annule dès que la fréquence d'échantillonnage  $1/\Delta x$  est supérieure à la fréquence de coupure de  $f(x)$ . Il est intéressant de noter que ceci est beaucoup moins contraignant que le critère d'échantillonnage de Shannon qui impose une fréquence d'échantillonnage double. En effet, pour mesurer le centre de gravité seule la fréquence nulle est nécessaire, il



peut donc y avoir repliement du spectre tant que celui-ci n'affecte pas la fréquence 0. Dans ces conditions d'échantillonnage, on n'introduit pas de biais.

Je vais à présent m'intéresser au moment d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
 M_2[f_k] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k\Delta x)^2 \cdot f_k = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( [\hat{f}''\hat{h} + 2\hat{f}'\hat{h}' + \hat{f}\hat{h}''](\frac{k}{\Delta x}) \right) \\
 &= -\frac{1}{4\pi^2} \left( \hat{f}''(0) + 2 \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k \Delta x}{k} \hat{f}'(\frac{k}{\Delta x}) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^{k+1} \Delta x^2}{k^2} \hat{f}(\frac{k}{\Delta x}) - \frac{(\pi \cdot \Delta x)^2}{3} \hat{f}(0) \right) \quad (5.15) \\
 &= M_2[f] + \frac{(\Delta x)^2}{12} + \frac{\Delta x}{\pi^2} \sum_{k>0} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{Re} \left( \hat{f}'(\frac{k}{\Delta x}) \right) \\
 &\quad - \frac{\Delta x^2}{\pi^2} \sum_{k>0} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \operatorname{Re} \left( \hat{f}(\frac{k}{\Delta x}) \right)
 \end{aligned}$$

Comme pour l'équation (5.9), les termes faisant intervenir les fréquences non nulles disparaissent lorsque  $1/\Delta x$  est supérieur à la fréquence de coupure de  $f(x)$ .

En reportant les deux résultats précédent dans les équations (5.5) et (5.8), on obtient :

$$\boxed{\langle \tilde{x}_0 \rangle = M_1[f] = x_0} \quad (5.16)$$

$$\boxed{\operatorname{Var}(\tilde{x}_0) = \frac{1}{N_{ph}} \left[ M_2[f] + \frac{(\Delta x)^2}{12} \right]} \quad (5.17)$$

On voit donc que l'échantillonnage par le CCD n'introduit pas de biais sur la mesure, mais augmente la variance  $\Delta x^2/12$  (c'est la variance d'une distribution uniforme de largeur  $\Delta x$ ).

### Effet d'un bruit additif

Dans cette partie, on considère l'effet des bruits, décorrélés de l'intensité, sur l'estimation du centre de gravité ( $\langle I_{i,j} b_{k,l} \rangle = 0$ ). Ceci correspond notamment au bruit de lecture et de courant thermique du CCD, mais également au bruit de numérisation.

L'intensité d'un pixel peut s'écrire :  $\tilde{I}_{i,j} = I_{i,j} + b_{i,j}$ . L'estimateur du centre de gravité devient alors :

$$\tilde{x}_0 = \frac{\sum_{k,l} k \cdot \Delta x (I_{k,l} + b_{k,l})}{\sum_{k,l} I_{k,l} + b_{k,l}} \quad (5.18)$$

On considère classiquement que le bruit ne change pas le nombre total de photons détectés, c'est à dire que l'on considère le dénominateur de l'équation précédente comme étant égal à  $\sum_{k,l} I_{k,l}$ . Afin de déterminer si cette approximation est justifier dans le cadre de l'expérience MaTILD, où on recherche une grande précision de mesure, je me place dans le cas où la contribution du bruit à la somme du signal de sortie est faible : *i.e.*,  $\sum b_{i,j} \ll \sum I_{i,j}$ <sup>2</sup>. Ceci permet d'effectuer un développement limité du dénominateur. Afin de simplifier les équations, je désigne la somme  $\sum I_{k,l}$  par le nombre total de photons sur l'image :  $N_{ph}$ .

J'effectue un développement à l'ordre 2 du dénominateur :

$$\tilde{x}_0 \simeq \frac{\sum_{k,l} k \cdot \Delta x (I_{k,l} + b_{k,l})}{N_{ph}} \times \left[ 1 - \frac{\sum_{k,l} b_{k,l}}{N_{ph}} + \left( \frac{\sum_{k,l} b_{k,l}}{N_{ph}} \right)^2 \right] \quad (5.19)$$

Suivant la même démarche que pour les autres bruits, j'étudie la moyenne et la variance de l'estimateur, afin de calculer le biais et l'erreur de cet estimateur. Pour faire cette étude, je suppose que le bruit est spatialement homogène et totalement décorrélé, ce qui se traduit par :  $\langle b_{i,j} b_{k,l} \rangle = \delta_{i,k} \cdot \delta_{j,l} \sigma_b^2$  où  $\sigma_b^2$  est la variance du bruit du CCD. Cette hypothèse est bien vérifiée sur les données de courant d'obscurité : les images ne présentent pas de structure aux hautes fréquences et peu de structures aux basses fréquences. Ceci est également visible sur l'autocorrélation du bruit qui est très piquée, synonyme d'un bruit spatialement décorrélé (pour un bruit totalement décorrélé, l'autocorrélation est un Dirac).

L'espérance mathématique de  $\tilde{x}_0$ , calculée dans une fenêtre de  $M_x$  par  $M_y$  pixels, est, sous ces hypothèses :

$$\boxed{\langle \tilde{x}_0 \rangle = x_0 + x_0 \cdot M_x M_y \frac{\sigma_b^2}{N_{ph}^2} - \frac{\sigma_b^2}{N_{ph}^2} \sum_{k,l} k \cdot \Delta x} \quad (5.20)$$

<sup>2</sup>Cette hypothèse est plus fine que celle couramment utilisée qui suppose que le nombre total de photons n'est pas perturbé par le bruit :  $\sum I_{i,j} + b_{i,j} \approx N_{ph}$

L'estimateur est donc biaisé, contrairement à ce que l'on trouve si on considère que le bruit du CCD ne modifie pas le nombre total de photons détectés. Ce biais peut toutefois être diminué en plaçant l'origine du repère au centre de la fenêtre de calcul du centre de gravité. Le deuxième terme s'annule en effet, car on a alors :  $\sum_{k,l} k \cdot \Delta x = 0$ . De plus, si on centre la fenêtre de calcul au pixel près sur le centre de gravité,  $|x_0| \leq 1/2 \text{ pixel}$ . Le biais est alors inférieur à :  $1/2 \times \sigma_b^2 M_x M_y / N_{ph}^2$ . On voit également l'utilité du développement à l'ordre 2. En effet, d'un développement à l'ordre 1 résulte une espérance égale à :  $\langle \tilde{x}_0 \rangle = x_0 - \sigma_b^2 / N_{ph}^2 \sum_{k,l} k \cdot \Delta x$ , auquel cas, le centrage de la fenêtre supprime le biais. Toutefois cette correction est négligeable dans le cadre de l'expérience MaTilD. En effet :

- les fenêtres utilisées ont une taille typique de  $40 \times 40 \text{ pixels}$ .
- le CCD utilisé a un bruit de lecture de variance  $100e^{-2}$ .
- le bruit thermique est négligeable : pour une pose de  $20ms$  et une température de cible de  $-50 \text{ deg C}$  :  $\sigma_{th}^2 = 16.10^{-6}e^{-2}$ .
- bruit de numérisation est également négligeable : sa variance est égale<sup>3</sup> à  $LSB^2/12 = 0,9^2/12 = 0,07e^{-2} \ll 100e^{-2}$  où  $LSB$  désigne la valeur d'un niveau numérique en électrons

Le biais sur l'estimation du centre de gravité, pour des images contenant environ 500 000 photons, est inférieur à :  $0,3.10^{-6} \text{ pixels}$ . Celui-ci est donc totalement négligeable par rapport à l'écart type du signal à mesurer qui est au minimum de 0,05 pixels.

Je m'intéresse à présent à la variance de cet estimateur :

$$\langle (\tilde{x}_0 - \langle \tilde{x}_0 \rangle)^2 \rangle = x_0^2 2M_x M_y \frac{\sigma_b^2}{N_{ph}^2} + \frac{M_y M_x (M_x^2 - 1)(\Delta x)^2}{12N_{ph}^2} \sigma_b^2 \quad (5.21)$$

soit

$$\boxed{\langle (\tilde{x}_0 - \langle \tilde{x}_0 \rangle)^2 \rangle M_x M_y \frac{\sigma_b^2}{12N_{ph}^2} (24x_0^2 + (M_x^2 - 1)(\Delta x)^2)} \quad (5.22)$$

Dans le cas où la fenêtre de calcul est centrée (pour réduire le biais), on a  $|x_0| < \Delta x/2$ . Dans le cadre d'un calcul effectué sur des fenêtres de quelques dizaines de pixels de coté<sup>4</sup>, le

<sup>3</sup>la statistique est identique à celle du bruit d'échantillonnage : on ne connaît pas l'intensité à mieux qu'un demi-niveau près.

<sup>4</sup>ce n'est pas le cas pour des détecteurs à quatre quadrants ( $M_x = M_y = 2$ ). Dans ce cas, le développement à

terme prédominant est :  $\sigma_b^2 M_y M_x (M_x^2 - 1) (\Delta x)^2 / 12 N_{pH}^2$ . Dans les conditions de l'expérience MaTilD, on a :  $\text{Var}(\tilde{x}_0) = 0,42 \cdot 10^{-3} \text{pixel}^2$ . La variance du signal attendue est comprise entre  $\text{Var} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{pixel}^2$  et  $\text{Var} = 62,5 \cdot 10^{-3} \text{pixel}^2$ , soit un rapport signal sur bruit compris entre 2,5 et 12 pour le bruit additif.

### Effet de la correction imparfaite du DSNU et du PRNU

Lors de l'énumération des bruits et des biais affectant l'estimation du centre de gravité, on a vu que les biais sur l'intensité (DSNU et PRNU) pouvaient être supprimés en corrigeant l'image. J'étudie ici l'effet de la correction de ces biais à partir de données réelles, elles-mêmes bruitées. Je considère dans la suite un bruit additif. L'intensité recueillie en sortie du CCD peut alors s'écrire :

$$I_{i,j}^{ccd} = a_{i,j} I_{i,j}^s + c_{i,j} + b_{i,j} \quad (5.23)$$

où  $I^s$  est le signal que l'on cherche à détecter,  $a$  est la sensibilité relative de chaque pixel (PRNU),  $c$  le DSNU, et  $b$  le bruit de lecture.

Comme on l'a vu au chapitre chapitre 4.4.1, pour accéder à l'intensité  $I^s$  on corrige  $I^{ccd}$  en utilisant des champs plats (notés  $cp$ ) et des champs obscurs (notés  $co$ ). L'équation (5.23) nous donne les valeurs de sortie pour ces deux quantités :

$$\begin{cases} I_{i,j}^{co} = c_{i,j} + b_{i,j}^{co} \\ I_{i,j}^{cp} = a_{i,j} I^{ref} + c_{i,j} + b_{i,j}^{cp} \end{cases}$$

L'intensité estimée est alors :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{i,j} &= \frac{I_{i,j}^{ccd} - I_{i,j}^{co}}{I_{i,j}^{cp} - I_{i,j}^{co}} \\ &= \frac{a_{i,j} I_{i,j}^s + b_{i,j}^s - b_{i,j}^{co}}{a_{i,j} I^{ref} + b_{i,j}^{cp} - b_{i,j}^{co}} \end{aligned} \quad (5.24)$$

---

l'ordre 2 se justifie pleinement. En effet, on a :  $(M_x^2 - 1) (\Delta x)^2 = 3 (\Delta x)^2 < 6 (\Delta x)^2 = 24 * (\Delta x)^2$ , puisque  $|x_0| < \Delta x$  : le recentrage est toujours présent dans un détecteur 4 quadrants.

Dans la suite, pour simplifier les notations, j'ometts les indices  $i, j$ , les calculs étant effectués pixel par pixel.

En l'absence de bruit, cet estimateur de l'intensité est proportionnel à l'intensité reçue par le CCD. La détermination du facteur de proportionnalité se fait grâce aux données du constructeur sur la valeur moyenne de  $a$ . L'intensité de référence étant uniforme sur le capteur, on déduit  $I^{ref} = \langle I^{ccd}(ref) \rangle / \langle a \rangle$ .

En présence de bruit, j'étudie l'estimateur donné par l'équation (5.24). Je m'intéresse dans un premier temps à sa moyenne. Pour cela, je suppose que les bruits  $b^{cp}$  et  $b^{co}$  sont petits devant l'intensité de référence  $I^{ref}$ . Cette hypothèse est justifiée par le fait que l'intensité de référence est choisie proche de la saturation du CCD. Les bruits dominants (bruits de lecture et photonique) sont alors négligeables. Ceci permet d'effectuer un développement limité à l'ordre 2 de l'équation (5.24) :

$$\tilde{I} \approx \frac{I^s}{I^{ref}} + \frac{b^s - b^{co}}{a \cdot I^{ref}} - \frac{I^s(b^{cp} - b^{co})}{a \cdot (I^{ref})^2} - \frac{(b^s - b^{co})(b^{cp} - b^{co})}{(a \cdot I^{ref})^2} + \frac{I^s \cdot (b^{cp} - b^{co})^2}{a^2 \cdot (I^{ref})^3} \quad (5.25)$$

Compte tenu du fait que les bruits sont décorrélés du signal et indépendants, la moyenne de  $\tilde{I}$  est alors :

$$\langle \tilde{I} \rangle \approx \frac{I^s}{I^{ref}} + \frac{1}{(a \cdot I^{ref})^2} \left( \sigma_{b^{cp}}^2 \frac{I^s}{I^{ref}} + \sigma_{b^{co}}^2 \left( \frac{I^s}{I^{ref}} - 1 \right) \right) \quad (5.26)$$

L'estimateur est donc biaisé. On peut remarquer les rôles symétriques de  $b^{cp}$  et de  $b^{co}$ . Lorsque  $I^s = I^{ref}$ ,  $b^{cp}$  est le seul bruit et inversement lorsque  $I^s = 0$ , seulement  $b^{co}$  intervient. Leurs effets s'annulent lorsque  $I^s = 1/2 \cdot I^{ref}$ . Il est à noter que les variances des bruits sont atténuées dans le rapport  $1/(a \cdot I^{ref})^2$ , avec  $I^{ref} \gg \sigma_b^2$ . De plus, ce biais peut-être rendu aussi petit que l'on veut en moyennant  $N^{cp}$  champs plats et  $N^{co}$  champs obscurs. Les variances  $\sigma_{b^{cp}}^2$  et  $\sigma_{b^{co}}^2$  sont alors respectivement diminuées du facteur  $1/N^{cp}$  et  $1/N^{co}$ . Dans le cas de l'expérience MaTilD, en prenant une intensité de référence d'environ 60% de  $I_{max}$  ( $I_{max} \approx 15000e-$ ) et une sensibilité relative d'environ 50%, un majorant du biais est donné par :  $\sigma_{b^{cp}}^2 / (a \cdot I^{ref})^2 \approx (\sigma_{lecture}^2 + \sigma_{photon}^2) / (a \cdot I^{ref})^2 \approx 4,6 \cdot 10^{-4} e-$ , ce qui est négligeable.

Je m'intéresse alors à la variance de  $\tilde{I}$  :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{I}) = \text{Var}\left(\frac{I^s}{I^{ref}}\right) + \sigma_{bs}^2 \\ + \frac{1}{(a.I^{ref})^2} \cdot \left\{ \sigma_{bco}^2 \left[1 - \frac{I^s}{I^{ref}}\right]^2 + \sigma_{bcp}^2 \left[1 + \left(\frac{I^s}{I^{ref}}\right)^2\right] \right\} \end{aligned} \quad (5.27)$$

On voit ici que la variance de l'estimateur est égale à la variance de l'estimé augmentée de la variance du bruit sur le signal et d'un terme issu de la correction du PRNU et du DSNU. La variance du bruit  $\sigma_{bs}^2$  est celle que j'ai considérée auparavant dans l'étude des bruits. Il est normal de la retrouver ici : la correction du PRNU et du DSNU ne modifie en rien le bruit temporel présent sur les images. De même que pour la moyenne, les variances des champs plats et obscurs peuvent être diminuées en moyennant plusieurs champs et atténuées par le facteur  $1/(a.I^{ref})^2$ . Dans le cas de l'expérience MaTilD, un majorant de la variance est :  $2 * \sigma_{bcp}^2 / (a.I^{ref})^2 \approx 10^{-3}e^{-2}$ , ce qui est négligeable par rapport à la variance du bruit de lecture ( $100e^{-2}$ ).

### 5.1.2 Rapport signal sur bruit attendu

Je fais à présent le bilan des bruits affectant la mesure du centre de gravité dans le cadre de l'expérience MaTilD, pour déduire le rapport signal sur bruit attendu. Pour cela, je calcule la variance de l'erreur commise lors de l'estimation du centre de gravité en prenant les bruits prépondérants : le bruit photonique pour un capteur pixelisé (voir équation (5.17)) et le bruit de lecture (voir équation (5.22)). Ces bruits étant indépendants, leurs variances s'ajoutent quadratiquement :  $\text{Var}(\varepsilon) = \text{Var}_{\text{photon}} + \text{Var}_{\text{lecture}}$ .

À ces bruits s'ajoute la variance de l'erreur sur la mesure de la position moyenne des centres de gravité. En effet, la mesure de centre de gravité est relative à la position des images sur le capteur. Or, l'angle d'arrivée est de moyenne nulle ; la position moyenne des images est donc soustraite longueur d'onde à longueur d'onde. La variance de cette erreur est la somme quadratique des précédentes sur le nombre d'images. La contribution de celle-ci reste négligeable car les données sont constituées de trames de 200 images, ceci augmente l'écart type de 0,5%.

Pour calculer le signal, je me place dans les conditions d'acquisition suivantes :  $D = 15\text{cm}$ ,  $r_0 = 3\text{cm}$ , soit un écart type du tilt de  $1,49'' = 4,5\text{pixels}$  (voir équation (2.15)). La valeur du

tilt différentiel est alors obtenue en considérant les longueurs d'onde de la deuxième version de MaTilD.

$\lambda (nm)$	673	505	404	337
673	0	0,05	0,12	0,21
505	0,05	0	0,07	0,16
404	0,12	0,07	0	0,09
337	0,21	0,16	0,09	0

TAB. 5.1 – **Tilt différentiel (en pixels) pour la deuxième version de l'expérience MaTilD.** Avec  $D = 15cm$ ,  $r_0 = 3cm$ , soit  $\sigma_{tilt} = 4,5 pixels$

Pour le bruit les valeurs à considérer sont :

- la variance de la tache image de  $\lambda/r_0$ .
- le nombre de photons par fenêtre de calcul (obtenu sur les données MaTilD)
- le bruit de lecture du CCD :  $\sigma_{lecture} = 10e-$
- la taille des fenêtres utilisées (je prends pour le calcul des fenêtres de  $40 \times 40 pixels$ ).

Je calcule dans un premier temps le rapport signal sur bruit de la mesure du tilt. Le tableau 5.2 récapitule les valeurs respectives des différents écarts type ainsi que le rapport signal sur bruit attendu. Il est à remarquer que le bruit d'échantillonnage est négligeable ainsi que l'erreur sur la mesure de la position moyenne. Ceci était prévisible car l'instrument sur-échantillonne largement l'image, au sens du centre de gravité (voir chapitre 5.1.1)

Entre deux longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , la mesure du tilt différentiel se fait par différence de deux mesures du tilt, le rapport signal sur bruit est alors donné par :

$$S/B = \frac{\Delta n}{n-1} \frac{\sigma_{tilt}}{\sqrt{\sigma_{bruit}^2(\lambda_1) + \sigma_{bruit}^2(\lambda_2)}} \quad (5.28)$$

L'erreur sur la mesure différentielle d'une part et le rapport signal sur bruit attendu d'autre part sont donnés dans les tableaux 5.3 et 5.4. On peut remarquer que le rapport signal sur bruit n'est pas symétrique car le facteur  $\Delta n/(n-1)$  ne l'est pas. Suivant la longueur d'onde de référence,  $n-1$  varie et donc  $(n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2})/(n_{\lambda_1} - 1) \neq (n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2})/(n_{\lambda_2} - 1)$ .

$\lambda (nm)$	673	505	404	337
$\sigma_{signal}(pixel)$	4,5	4,5	4,5	4,5
$\sigma_{photon}(pixel)$	0,012	0,010	0,012	0,022
$\sigma_{lecture}(pixel)$	0,004	0,005	0,011	0,050
$\sigma_{moy}(pixel)$	0,00090	0,00079	0,0012	0,0039
$\sigma_{total}(pixel)$	0,0128	0,0121	0,0163	0,0548
<b>signal/bruit</b>	347,6	401,4	275,6	82,1

TAB. 5.2 – **Rapport signal sur bruits pour chaque longueur d’onde de l’expérience MaTILD (deuxième version).** Les écarts types du signal et des bruits des mesures du centre de gravité sont détaillés.

$\lambda (nm)$	673	505	404	337
673	0	0.0169	0.0206	0.0561
505	0.0169	0	0.0198	0.0558
404	0.0206	0.0198	0	0.0570
337	0.0561	0.0558	0.0570	0

TAB. 5.3 – **Écart type de l’erreur sur la mesure différentielle du tilt entre deux longueurs d’onde, en pixel**

On voit ici que le rapport signal sur bruit pour le tilt différentiel est très faible, malgré la qualité de la mesure du tilt. Ce faible rapport signal sur bruit montre toute la difficulté de la mesure.

### 5.1.3 Évolution du rapport signal sur bruit avec le temps de pose

J’étudie ici l’effet de l’augmentation du temps de pose sur le rapport signal sur bruit. Deux effets antagonistes influent sur ce rapport : augmenter le temps de pose augmente le nombre de photons, ce qui améliore le rapport signal sur bruit, mais plus le temps de pose est long moins l’angle d’arrivée sera important (la moyenne temporelle est nulle, pour un temps d’intégration infiniment long). Afin d’estimer la contribution des deux effets, je me base sur l’article de H.M. Martin[49]. Cet article étudie l’atténuation de la variance du tilt due au temps de pose fini, pour cela il se base sur l’hypothèse de Taylor : la turbulence atmosphérique est figée dans les masses



$\lambda (nm)$	673	505	404	337
673	0	3,2	4,7	2,2
505	3,2	0	2,6	1,7
404	4,8	2,6	0	0,9
337	2,3	1,7	0,9	0

TAB. 5.4 – **Rapport signal sur bruit attendu pour la mesure du tilt différentiel entre deux longueurs d'onde**

d'air et se déplace avec le vent.

Cette hypothèse est couramment utilisée lors du calcul des effets temporels de la turbulence atmosphérique. Elle permet de rendre compte d'une partie de la corrélation temporelle de la turbulence, mais elle n'est pas toujours suffisante[50]. En effet à cette hypothèse de la turbulence figée dans les masses d'air s'ajoute une autre variation temporelle de la turbulence assimilable au bouillonnement. L'importance relative d'un phénomène par rapport à l'autre est variable et est fonction des conditions de turbulence et du temps de pose. Je me base toutefois sur l'hypothèse de Taylor, celle-ci constituant le cas favorable, dans le cas du centre de gravité. L'étude qui est faite donne donc un majorant de l'évolution du rapport signal sur bruit avec le temps de pose.

Pour un temps de pose infiniment court, la variance de l'angle d'arrivée est calculée à partir de la densité spectrale de puissance de la phase déformée par la turbulence atmosphérique pondérée par la densité spectrale de puissance de la pupille sur laquelle est effectuée la mesure ; soit pour une pupille circulaire de diamètre  $d$  :

$$\begin{aligned}\sigma_0^2 &= 2. \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 (0,0229 r_0^{-5/3}) 4\pi^3 d^{-1/3} \times \int_0^\infty q^{-2/3} \left[ \frac{2J_1(\pi q)}{\pi q} \right]^2 dq \\ &= 0,34 \lambda^2 r_0^{-5/3} d^{-1/3}\end{aligned}\quad (5.29)$$

On retrouve ici la formule (2.15).

Lorsque le temps de pose n'est plus infiniment court, la fonction de pondération de la densité spectrale de puissance n'est plus uniquement celle de la pupille, car un effet de lissage intervient. Celui-ci dépend de la direction relative  $\theta$  du vent par rapport à celle de la mesure des angles d'arrivée (voir figure 5.1) et du rapport  $w\tau/d$  entre la vitesse du vent  $w$ , le temps d'exposition

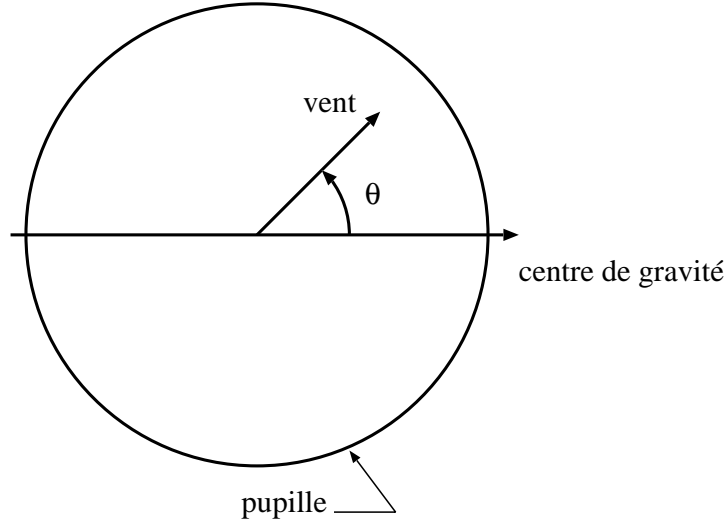


FIG. 5.1 – Définition des variables pour le calcul de l'atténuation de l'angle d'arrivée avec le temps de pose.

$\tau$  et le diamètre de la pupille  $d$  :

$$\sigma_\tau^2 = 2 \cdot \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 (0,0229r_0^{-5/3}) 4\pi^3 d^{-1/3} \times \int_0^\infty q^{-2/3} \left[ \frac{2J_1(\pi q)}{\pi q} \right]^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi - \theta) \cdot \text{sinc}^2 \left( q \cos \phi \frac{w\tau}{d} \right)^2 d\phi dq \quad (5.30)$$

Dans un premier temps, je ne cherche pas à déterminer le temps de pose optimal qui nécessite la connaissance de la direction et de la vitesse du vent ; je cherche de façon qualitative la variation du rapport signal sur bruit pour la mesure des angles d'arrivée. Pour cette estimation, je ne prends en compte que le bruit photonique et le bruit de lecture du CCD (voir chapitre 5.1.2). Le bruit de mesure est donc :

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_{image}^2}{N_{ph}} + \frac{M^2(M^2 - 1)\sigma_{lecture}^2}{12N_{ph}^2} \quad (5.31)$$

Il est à remarquer que si on est limité par le bruit de photons, ceci reste vrai lorsque le temps de pose augmente, l'erreur due au bruit de photons diminuant en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  alors que l'erreur due au bruit de lecture décroît en  $\frac{1}{N}$ .

Dans les conditions de l'expérience MaTilD, le temps de pose minimal est de 20ms et le diamètre de la pupille est de 150mm. Pour cette expérience, le vent est majoritairement dans la direction horizontale (étant l'altitude basse du faisceau lumineux). Or le capteur d'images est

tourné de  $45^\circ$ , on se trouve donc dans la condition où la direction du vent fait un angle de  $45^\circ$  par rapport aux directions de mesure. De plus ceci constitue le cas « moyen » de l'effet étudié.

Je considère le cas d'un vent faible ( $10\text{km/h} = 2,8\text{m.s}^{-1}$ ), moyen ( $30\text{km/h} = 8,3\text{m.s}^{-1}$ ) et fort ( $60\text{km/h} = 16,7\text{m.s}^{-1}$ ). Dans chaque cas, j'estime la perte de signal pour un temps de pose de  $20\text{ms}$  et pour un temps de pose de  $100\text{ms}$  d'après les courbes données dans l'article[49]. Le rapport signal sur bruit est estimé comme précédemment (voir tableau 5.2). L'atténuation de la

$w$ (km/h)	$w\tau/d$	atténuation	S/B à 673nm	505nm	404nm	337nm
0	0	1	504	420	224	57
10	0,37	0,98	494	411	220	56
30	1,11	0,92	463	386	206	52
60	2,22	0,81	408	340	182	46

TAB. 5.5 – *Atténuation du rapport signal sur bruit due à un temps de pose de 20ms aux différentes longueurs d'onde.*

variance étant relativement lente en fonction du rapport  $w\tau/d$ , ceci incite à augmenter fortement le temps de pose. En passant à un temps de pose de  $100\text{ms}$  on obtient le rapport signal sur bruit donné dans la table 5.6.

$w$ (km/h)	$w\tau/d$	atténuation	S/B à 673nm	505nm	404nm	337nm
0	0	1	1166	1011	622	220
10	1,85	0,85	991	859	528	187
30	5,55	0,67	781	677	417	147
60	11,11	0,52	606	525	323	114

TAB. 5.6 – *Atténuation du rapport signal sur bruit due à un temps de pose de 100ms aux différentes longueurs d'onde.*

Ceci montre que, selon les conditions de vent, le gain en terme de rapport signal sur bruit varie, tout en restant important (un facteur 2 à 2,5) même avec un vent fort. Il est toutefois à noter que l'augmentation du temps de pose diminue le contraste des tavelures. Ceci restreint le choix du traitement des données au calcul du centre de gravité. De plus, comme je l'ai mentionné dans

l'introduction, cette étude ne se base que sur l'hypothèse de Taylor, l'effet de bouillonnement de la turbulence n'est pas pris en compte et je n'ai pas eu le temps d'étudier son importance dans le cas particulier de l'expérience MaTilD. Par ailleurs, l'article de H.M. Martin considère la turbulence sous forme d'une couche turbulente infiniment mince. Ceci n'est pas le cas dans l'expérience MaTilD. L'atténuation des angles d'arrivée peut donc être plus rapide.

Toutefois sur la base de cette étude, il a été choisi, lors de la deuxième série de mesures, d'effectuer des acquisitions avec un temps de pose court (20ms) et avec le temps de pose le plus long possible, compte tenu de la dynamique de la caméra pour le même gain (soit 60ms).

## 5.2 Mesures des angles d'arrivée sur les données MaTilD

Je ne traite ici que les données obtenues avec la deuxième version de l'expérience MaTilD. Les images de la première version sont trop dégradées par l'aberration du miroir M1 pour permettre un traitement convenable.

Les images obtenues sont pré-traitées : soustraction du fond, correction du champ plat. Après ce pré-traitement, le centre de gravité est calculé pour chacune des quatre images monochromatiques présentes sur chaque trame. Ce calcul se fait de façon itérative avec une fenêtre de calcul de 40, 50, 50 et 30 pixels de coté respectivement pour les longueurs d'onde 673nm, 505nm, 404nm et 337nm. A chaque itération cette fenêtre de calcul est recentrée sur le centre de gravité estimé à l'itération précédente (voir chapitre 5.1.1). Le calcul s'arrête lorsque le centre de gravité est dans le pixel central. Le point de départ choisi pour une trame est le centre de gravité calculé sur la trame précédente. Pour la première trame, je choisis de prendre le centre de gravité estimé grossièrement : l'œil est utilisé pour trouver le centre de gravité. L'erreur ainsi commise est toutefois faible (inférieure à 2 pixels).

Afin d'estimer la validité d'une estimation du centre de gravité, je considère que le résultat final ne doit pas dépendre de façon critique des conditions initiales. Pour cela, je considère cinq points de départ différents (le centre et les quatre coins d'un carré de 5 pixels de côté). Les seuls résultats retenus sont ceux pour lesquels, le centre de gravité est le même pour toutes les conditions initiales (voir figure 5.2). Sur les données MaTilD, environ un tiers des trames sont

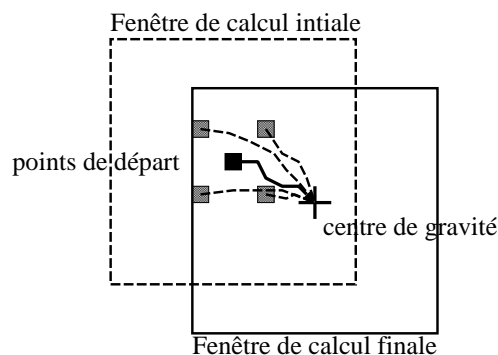


FIG. 5.2 – *Détermination de la stabilité de l'estimation du centre de gravité : pour des conditions initiales proches, le résultat obtenu doit être le même.*

rejetées en appliquant le critère suivant : une trame est rejetée si une des estimation du centre de gravité est sensible aux conditions initiales.

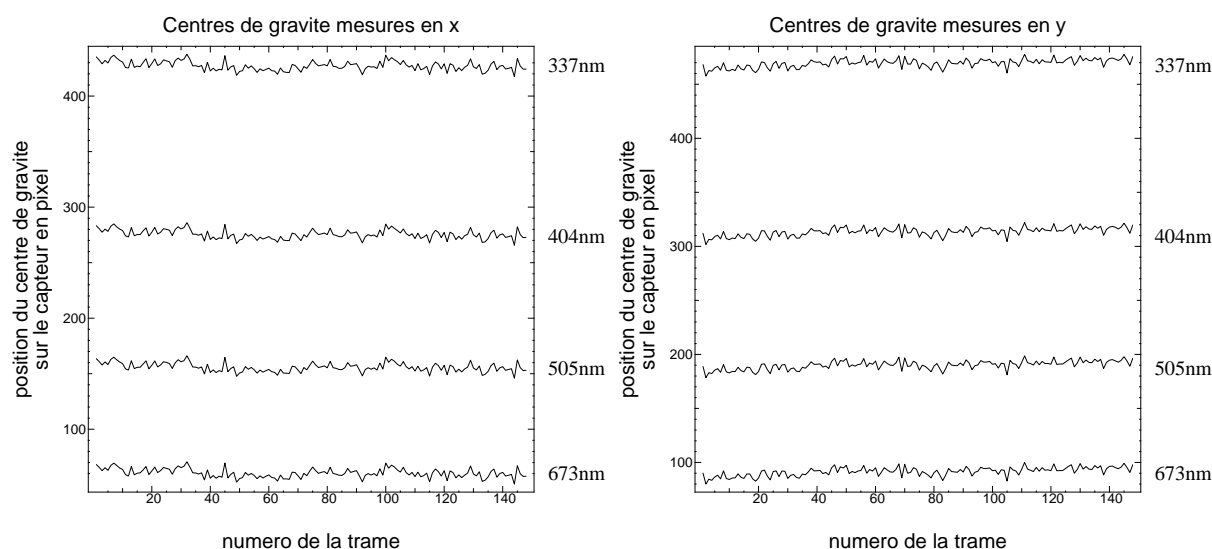


FIG. 5.3 – *Centres de gravité mesurés pour les quatre longueurs d'onde de l'expérience MaTilD : 667nm, 505nm, 404nm et 337nm en fonction du numéro de la trame. La position est donnée en pixels par rapport à l'origine du capteur (coin en bas à gauche de l'image 4.14).*

A partir des positions des centres de gravité obtenus (voir figure 5.3), je déduis l'angle d'arrivé en soustrayant au centre de gravité la valeur moyenne calculée sur l'ensemble des trames (voir figure 5.4), la moyenne temporelle des angles d'arrivée étant nulle pour un temps d'intégration infini.

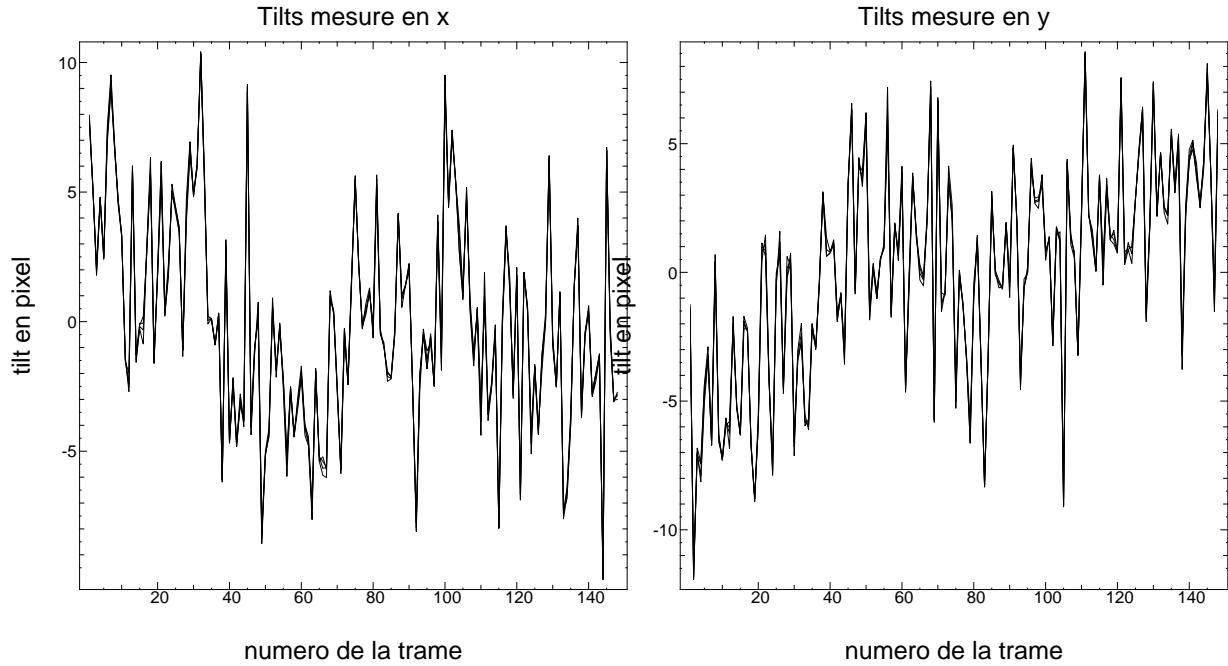


FIG. 5.4 – *Tilts en x et en y, mesurés à 667nm, 505nm, 404nm et 337nm, en fonction du numéro de la trame. Le tilt est mesuré en pixel. Il est à remarquer que les tilt sont très semblables, ce qui confirme que le tilt différentiel est faible comparé au tilt.*

Je me suis tout d'abord intéressé à la différence entre deux tilts mesurés à deux longueurs d'onde (tilt différentiel) en fonction du tilt mesuré à une troisième longueur d'onde (celle-ci pouvant être l'une des deux précédentes). Si le tilt différentiel est correctement mesuré, les données doivent se répartir le long d'une droite dont la pente est donnée, conformément à l'équation (3.7), par la relation entre les indices de réfraction de l'air :  $(n_1 - n_2)/(n_3 - 1)$ . La figure 5.5 présente le cas du tilt différentiel mesuré entre 673nm et 337nm en fonction du tilt mesuré à 505nm. Sur cette courbe, j'ai ajusté (au sens des moindres carrés) une droite, la pente de celle-ci est  $-0,035 \pm 0,350$  contre  $-0,040$  théoriquement. La pente ajustée est proche de celle que prévoit le théorie. Toutefois, les données sont très dispersées, l'estimation de la pente est donc peu précise. Le fait de trouver des valeurs similaires n'est pas significatif. L'ensemble des pentes ajustées est présenté dans le tableau 5.7).

Ceci est confirmé par le calcul des coefficients de corrélation du tilt différentiel en fonction du tilt. Le tableau 5.9 récapitule les résultats obtenus. Afin de comparer les résultats obtenus par rapport à l'étude théorique menée au chapitre 5.1, j'estime le bruit sur les mesures comme

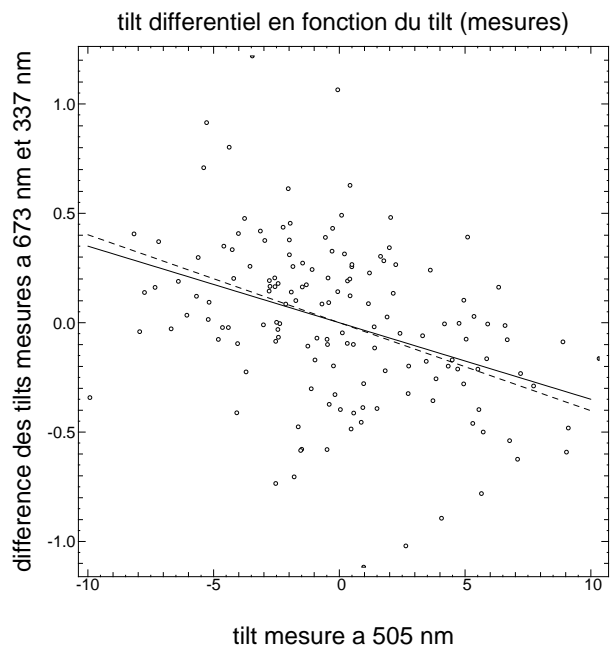


FIG. 5.5 – *Tilt différentiel mesuré entre 673nm et 337nm en fonction du tilt mesuré à 505nm (unité : pixel). La pente de la droite ajustée sur les données au sens des moindres carrés est indiquée en trait plein, la droite théorique obtenu à partir de l’indice de réfraction de l’air est indiquée en pointillés.*

$\lambda$ (nm)	673	505	404	337
673 – 505	$-0,002 \pm 0,140$	$-0,003 \pm 0,140$	$-0,003 \pm 0,140$	$-0,004 \pm 0,140$
673 – 404	$-0,013 \pm 0,256$	$-0,015 \pm 0,256$	$-0,017 \pm 0,252$	$-0,017 \pm 0,252$
673 – 337	$-0,033 \pm 0,353$	$-0,035 \pm 0,350$	$-0,037 \pm 0,345$	$-0,039 \pm 0,340$
505 – 404	$-0,011 \pm 0,156$	$-0,011 \pm 0,155$	$-0,013 \pm 0,153$	$-0,013 \pm 0,153$
505 – 337	$-0,031 \pm 0,277$	$-0,032 \pm 0,276$	$-0,033 \pm 0,272$	$-0,035 \pm 0,267$
404 – 337	$-0,020 \pm 0,197$	$-0,020 \pm 0,197$	$-0,020 \pm 0,196$	$-0,022 \pm 0,192$

TAB. 5.7 – *Pentes des droites ajustées sur les courbes de tilt différentiel en fonction du tilt, les valeurs théoriques sont précisées dans le tableau 5.8.*

$\lambda$ (nm)	673	505	404	337
673 – 505	-0,010	-0,010	-0,010	-0,010
673 – 404	-0,024	-0,023	-0,023	-0,023
673 – 337	-0,041	-0,040	-0,040	-0,039
505 – 404	-0,013	-0,013	-0,013	-0,013
505 – 337	-0,031	-0,030	-0,030	-0,029
404 – 337	-0,017	-0,017	-0,017	-0,016

TAB. 5.8 – Pentes, entre le tilt différentiel et le tilt, calculées à partir de l'indice de réfraction de l'air[40]

$\lambda$ (nm)	673	505	404	337
673 – 505	-0,049	-0,083	-0,102	-0,106
673 – 404	-0,199	-0,228	-0,260	-0,268
673 – 337	-0,354	-0,376	-0,402	-0,431
404 – 505	-0,279	-0,295	-0,331	-0,340
337 – 505	-0,415	-0,426	-0,450	-0,485
337 – 404	-0,381	-0,385	-0,392	-0,435

TAB. 5.9 – Coefficient de corrélation entre le tilt différentiel et le tilt (mesures).



l'écart des points de mesures par rapport à la droite ajustée sur ces points. Ceci revient à supposer que la dispersion des points n'est due qu'à des bruits de mesure. Les résultats sont donnés dans le tableau 5.10.

$\lambda$ (nm)	673	505	404	337
673		0,139	0,252	0,345
505	0,139		0,153	0,271
404	0,252	0,153		0,194
337	0,345	0,271	0,194	

TAB. 5.10 – *Erreur sur la mesure du tilt différentiel estimé sur les données. L'écart type de l'erreur est exprimé en pixels.*

Il est important de remarquer que ces valeurs sont près de dix fois supérieures aux estimations théoriques du chapitre 5.1. Je me suis alors penché sur les causes de détérioration de la corrélation entre le tilt différentiel mesuré et le tilt. Une de ces causes est le déplacement relatif de la source et de l'instrument : il s'agit des « vibrations » mentionnées au chapitre 4.2.2. Celles-ci peuvent être dues à des variations de gradient d'indice suivant la direction verticale ou à l'effet du vent sur les bâtiments (déplacement principalement suivant la direction horizontale). Pour estimer l'effet dominant, j'ai exprimé les tilt mesurés dans les coordonnées suivantes : l'axe  $X$  est horizontal et l'axe  $Y$  est vertical (rappel : le capteur est incliné à  $-45^\circ$ ). Les tilts observés sont présentés dans la figure 5.6. Il est à remarquer que le tilt suivant l'axe vertical n'est pas stationnaire. Ceci est dû à la variation de température lors des acquisitions : le début de la séquence correspond à la tombée de la nuit, le sol est alors chaud et l'air plus froid. L'indice de réfraction est donc différent suivant l'altitude. Le faisceau issu de la source est alors réfracté<sup>5</sup>. Par contre, après quelques temps, la température s'uniformise (la température au sol a perdu  $5^\circ\text{C}$  en deux heures). Les faisceaux lumineux sont alors moins réfractés. La position apparente de la source change. Comme cet effet est dû uniquement à une variation de température, celle-ci ne modifie pas le chromatisme de l'indice de réfraction de l'air. Elle n'a donc pas d'influence sur le tilt différentiel, comme on l'a vu au § 3.3.2. Dans un premier temps, je n'ai considéré

<sup>5</sup>Le phénomène est identique aux mirages

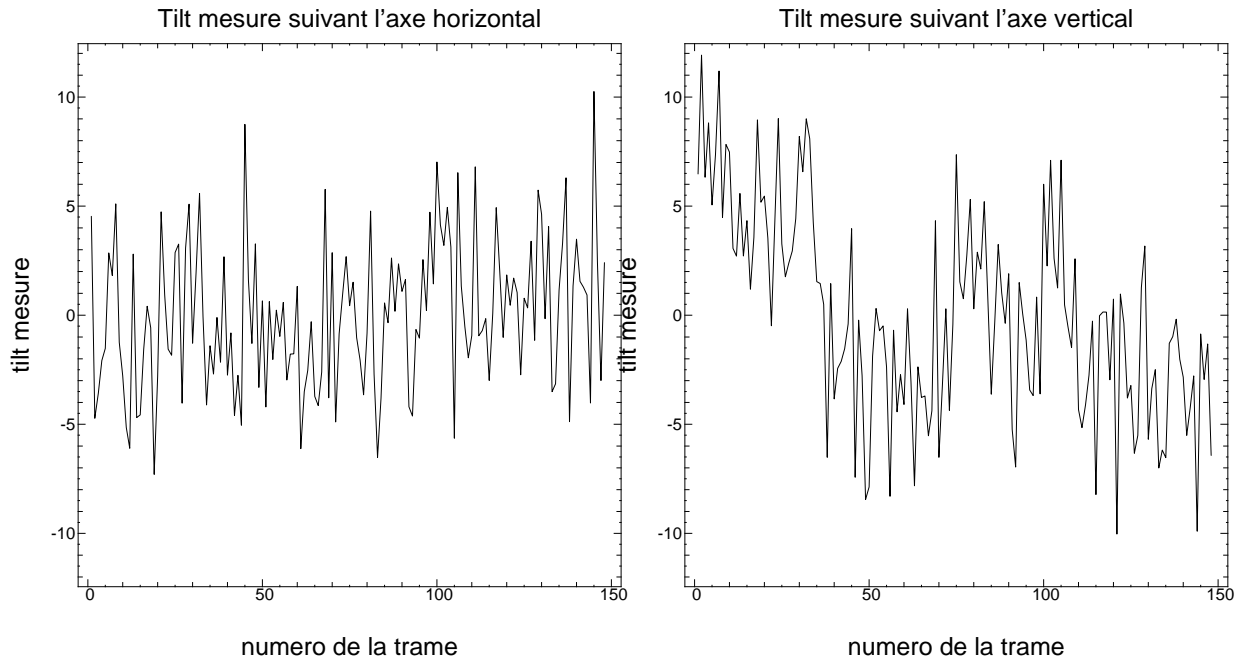


FIG. 5.6 – *Tilts mesurés, projetés respectivement sur les axes horizontal et vertical (unité : pixel).*

que l'axe horizontal qui ne subit pas cette réfraction. Or les coefficients de corrélation alors obtenus (voir tableau 5.11) sont alors moins bons que pour les tilts mesurés suivant les axes du capteur. De plus arrive également à la même conclusion si on ne considère que l'axe vertical. Cette réfraction ne semble donc pas être l'origine de la dispersion des données.

Une autre origine possible est les vibrations de la tour (sur laquelle la source est fixé) sous l'effet du vent qui soufflait au cours de l'expérience. Ces vibrations se situent probablement à de hautes fréquences temporelles et sont d'assez courte durée. Les mouvements ne sont donc pas cohérents sur les données, étant donnée la fréquence d'échantillonnage des images ( $0,2Hz$ ). Toutefois ces vibrations peuvent accroître l'écart type de l'angle d'arrivée mesuré.

Afin d'améliorer la corrélation et mieux mettre en évidence le chromatisme du tilt, j'ai alors travaillé sur les tilts différentiels uniquement. En effet, on s'affranchit alors de tout problème de tilt achromatique. En contrepartie, l'écart type du bruit est augmenté d'un facteur  $\sqrt{2}$ . J'obtiens alors plusieurs séries de courbes telles que celles de la figure 5.8.

Dans cette nouvelle représentation, j'ai également ajusté une droite au sens des moindres carrés et calculé le coefficient de corrélation. La pente attendue de cette droite est :  $(n_1 -$

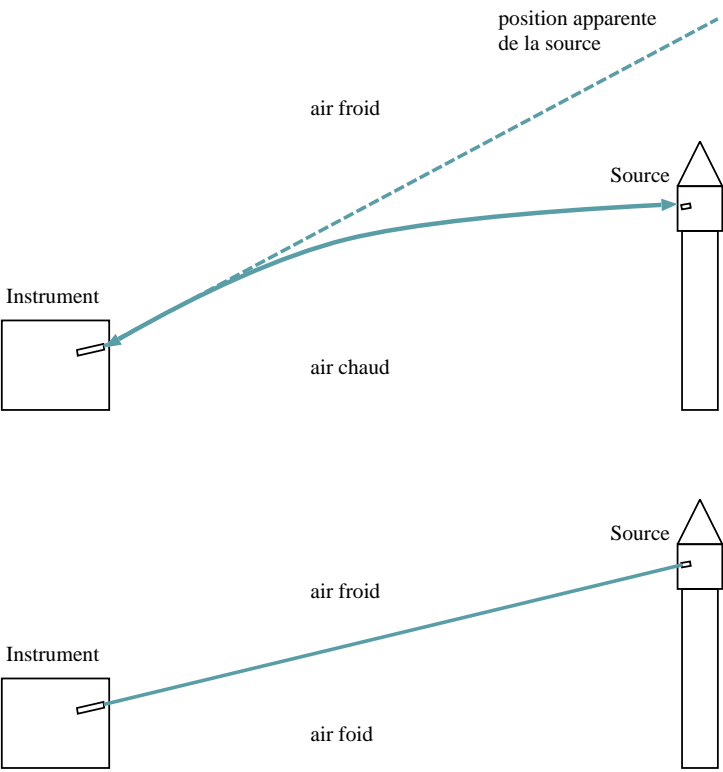


FIG. 5.7 – *Variation de la position apparente de la source lumineuse due à la variation de température. L'air chaud a un indice de réfraction inférieur à l'air froid, le faisceau est réfracté. Lorsque la température de l'air s'est uniformisée, le faisceau n'est plus réfracté.*

$\lambda$ (nm)	673	505	404	337
673 – 505	0,034	-0,013	-0,035	-0,032
673 – 404	-0,047	-0,087	-0,127	-0,136
673 – 337	-0,133	-0,162	-0,200	-0,238
505 – 404	-0,112	-0,133	-0,180	-0,197
505 – 337	-0,181	-0,192	-0,227	-0,275
404 – 337	-0,177	-0,175	-0,190	-0,247

TAB. 5.11 – *Coefficients de corrélation entre le tilt différentiel et le tilt après projection sur l'axe horizontal*

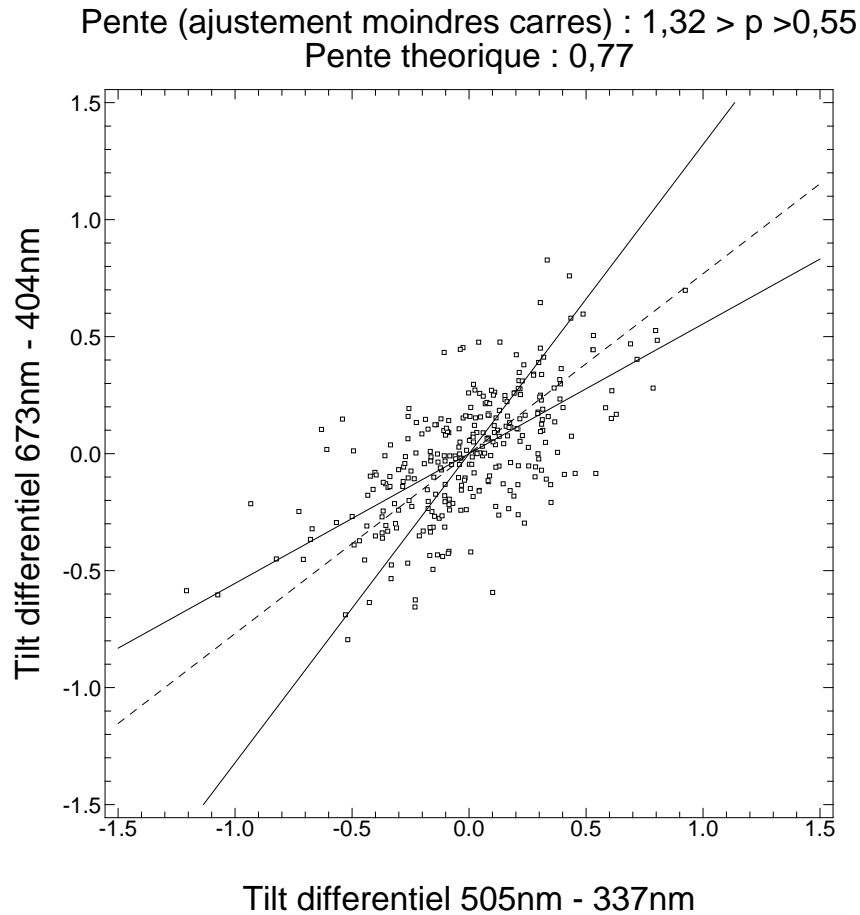


FIG. 5.8 – *Tilt différentiel (673nm - 404nm) en fonction du tilt (505nm - 337nm), unité : pixel. Les droites ajustées sur les données au sens des moindres carrés sont indiquées en trait plein. Les pentes sont de 0,55 et 1,32, correspondant respectivement à un ajustement où i) les erreurs sont suivant le tilt différentiel 673nm – 404nm ii) les erreurs sont suivant le tilt différentiel 505nm – 337nm. La pente théorique de 0,769 est indiquée en pointillés et est bien encadrée par les droites ajustées.*

$n_2)/(n_3 - n_4)$ . Les résultats obtenus pour les pentes sont récapitulés dans le tableau 5.12 et comparés aux valeurs théoriques attendues 5.13.

$\lambda$ (nm)	673-505	673-404	673-337	505-404	505-337	404-337
673-505	1	$0,453 \pm 0,076$	$0,242 \pm 0,107$	$0,422 \pm 0,123$	$0,158 \pm 0,132$	$0,079 \pm 0,140$
673-404	$1,561 \pm 0,142$	1	$0,580 \pm 0,143$	$1,423 \pm 0,123$	$0,554 \pm 0,200$	$0,313 \pm 0,253$
673-337	$1,744 \pm 0,287$	$1,209 \pm 0,206$	1	$1,827 \pm 0,234$	$1,158 \pm 0,132$	$1,313 \pm 0,253$
505-404	$0,561 \pm 0,142$	$0,547 \pm 0,076$	$0,337 \pm 0,100$	1	$0,396 \pm 0,108$	$0,233 \pm 0,154$
505-337	$0,744 \pm 0,287$	$0,756 \pm 0,232$	$0,758 \pm 0,107$	$1,405 \pm 0,203$	1	$1,233 \pm 0,154$
404-337	$0,183 \pm 0,212$	$0,209 \pm 0,206$	$0,420 \pm 0,143$	$0,405 \pm 0,203$	$0,604 \pm 0,108$	1

TAB. 5.12 – *Pentes mesurées sur les courbes de tilt différentiel en fonction du tilt différentiel, les valeurs théoriques sont précisées dans le tableau 5.13. Les erreurs sont estimée à partir de la dispersion des données[51].*

$\lambda$ (nm)	673-505	673-404	673-337	505-404	505-337	404-337
673-505	1	0,428	0,248	0,749	0,329	0,588
673-404	2,335	1	0,579	1,749	0,769	1,373
673-337	4,037	1,723	1	3,023	1,329	2,373
505-404	1,335	0,572	0,331	1	0,440	0,785
505-337	3,037	1,300	0,752	2,274	1	1,785
404-337	1,701	0,729	0,421	1,274	0,560	1

TAB. 5.13 – *Pentes théoriques entre deux tilts différentiels.*

Les pentes sont estimées avec plus de précision et encadre les pentes théoriques. Toutefois il faut noter des différences significatives entre les pentes théoriques et les pentes mesurées qui ne peuvent s'expliquer par les barres d'erreurs estimé au chapitre 5.1. La différence observée entre les deux pentes ajustées est due au principe de l'ajustement des moindres carrés que j'ai utiliser ici. L'ajustement d'une droite sur une série de point est un problème linéaire dont la solution analytique est aisément calculable lorsque les erreurs sont uniquement suivant la direction « y »

du graphique. Ici les erreurs sont *a priori* suivant les deux directions, c'est pourquoi le résultat diffère lorsque que les axes du graphiques sont intervertis. Il serait intéressant d'effectuer directement l'ajustement en considérant les erreurs comme étant réparties suivant les deux directions, mais il s'agit alors d'un problème non-linéaire que je n'ai pas eu le temps matériel de traiter.

Les pentes théoriques du tableau 5.13 sont calculées avec l'indice de réfraction de l'air pur[40]. Afin de libérer cette contrainte, j'ai choisi de laisser l'indice de réfraction libre et de l'ajuster pour minimiser l'écart entre les pentes déduites et les pentes mesurées. Les résultats de la minimisation au sens des moindres carrés sont donnés dans le tableau 5.14. Il est à re-

$\lambda$ (nm)	673	505	404	337
$(n-1) \cdot 10^6$ air pur	276,1	278,8	282,5	287,3
$(n-1) \cdot 10^6$ ajusté	269.6	270.9	273.9	275.4

TAB. 5.14 – *Indice de réfraction de l'air pur et indice de réfraction minimisant l'écart entre les pentes mesurées et le pentes déduites de celui-ci.*

marquer que l'indice est inférieur à l'indice de réfraction de l'air pur et que le chromatisme est moindre. Mais ceci n'est pas très significatif étant donnée la dispersion des points de mesure. Ceci est confirmé par le fait que les pentes  $(n_1 - n_2)/(n_3 - n_4)$  déduites de ce nouvel l'indice de réfraction (tableau 5.15) sont toujours très différentes des pentes mesurées (tableau 5.12).

$\lambda$ (nm)	673-505	673-404	673-337	505-404	505-337	404-337
673-505	1	0,317	0,233	0,464	0,303	0,873
673-404	3,153	1	0,734	1,464	0,956	2,754
673-337	4,298	1,363	1	1,996	1,303	3,754
505-404	2,153	0,683	0,501	1	0,653	1,880
505-337	3,298	1,046	0,767	1,531	1	2,880
404-337	1,145	0,363	0,266	0,532	0,347	1

TAB. 5.15 – *Pentes déduites de l'indice de réfraction ajusté précédemment.*

La dispersion des mesures est semblable pour les images avec un temps de pose de 60ms.

Ceci est prévisible car l'erreur sur la mesure est beaucoup plus importante que le bruit de photons, lequel domine dans l'étude théorique. Or cette étude théorique ne prend en compte que les bruits dont les effets sont estimables de façon analytique. C'est pourquoi je me suis tourné vers des simulations afin de prendre en compte d'autres effets tels que le fenêtrage ou le chevauchement des images.

## 5.3 Simulations

On vient de voir que la précision obtenue sur les mesures est bien inférieure à celle attendue par le calcul du rapport signal sur bruit. Celui-ci ne tenait compte que des erreurs quantifiables de façon analytique. Afin d'affiner l'estimation du rapport signal sur bruit, j'ai simulé les images obtenues par l'expérience MaTilD et j'applique le même traitement que sur les données.

### 5.3.1 Modèles des images

Le modèle utilisé ici cherche à rendre compte correctement de la nature tavelée des images et du chevauchement, mais aussi de la statistique des angles d'arrivée (voir 5.9). Une description mathématique du modèle est détaillée dans la partie § 6.5.1. Pour cela, je considère une

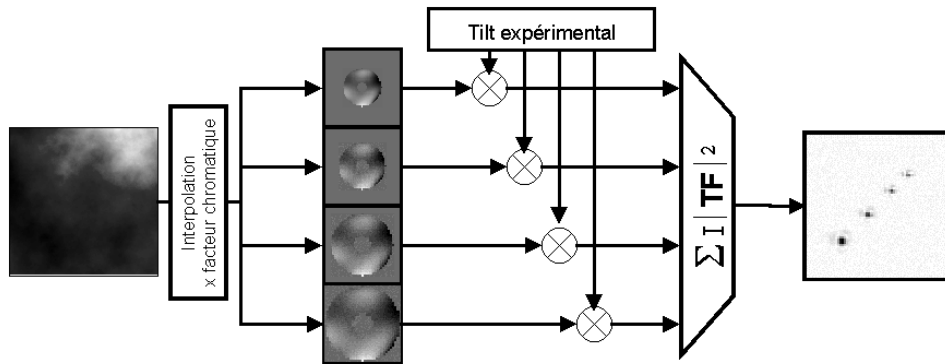


FIG. 5.9 – Principe de la génération d'images simulées de l'expérience MaTilD

carte de phase suivant une statistique de Kolmogorov. L'algorithme utilisé pour générer cette carte est l'algorithme proposé par R. Lane *et al.*[23]. Cette carte de phase est générée avec un échantillonnage correspondant à celui du plan pupille pour la plus petite longueur d'onde, le

nombre de points d'échantillonnage étant maximum ( $N_{points} \propto D/\lambda$ ). Le centre de gravité est calculé sur l'image monochromatique obtenue à partir de cette carte de phase. Afin de centrer l'image, j'ajoute à la carte de phase un tilt pur permettant d'obtenir un angle d'arrivée nul. Ceci me permet alors d'ajouter à nouveau un tilt pur connu. Le tilt choisi est égal à l'angle d'arrivée moyen mesuré sur les données d'une trame. En effet, on obtient ainsi la même répartition de tilt entre les images simulées et les images mesurées. En particulier la dérive due à la variation de température est prise en compte.

Cette phase est alors interpolée pour correspondre à l'échantillonnage du plan pupille pour les autres longueurs d'onde. On dispose finalement pour chaque longueur d'onde d'une carte de phase similaire. Chaque phase est multipliée par le facteur chromatique :  $\lambda_{min}/\lambda * (n_\lambda - 1)/(n_{\lambda_{min}} - 1)$  (voir chapitre 6.5.1). Afin de séparer les images monochromatiques sur l'image finale, un tilt chromatique fixe et connu est alors ajouté. C'est le rôle du prisme dans l'instrument.

L'image est ainsi constituée de la superposition incohérente des intensités aux différentes longueurs d'onde (*i.e.*, la somme des images monochromatiques pixel à pixel).

Afin de pouvoir identifier et quantifier les différents bruits, la procédure suivante a été retenue :

1. calcul d'une image monochromatique sur une fenêtre de grande taille :  $1024 \times 1024$  *pixels*. On évite alors les problèmes de repliement de champs dûs à l'utilisation de la transformée de Fourier discrète qui suppose une image périodique : l'intensité se trouvant au delà de la fenêtre est repliée. Une taille de  $1024 \times 1024$  *pixels* permet de négliger cette intensité repliée. Le calcul du centre de gravité est limité uniquement par le bruit numérique, l'erreur est alors inférieure à  $5 \cdot 10^{-14}$  pixels.
2. création de l'image simulée ( $512 \times 512$  *pixels*) en sommant les images monochromatiques. À ce stade de la simulation, le calcul du centre de gravité bruité par le chevauchement et le fenêtrage des images. L'erreur est d'environ  $1 - 2 \cdot 10^{-2}$  pixels. Ceci est légèrement supérieur au bruit de photons (voir le tableau 5.2)

L'effet du détecteur (corrélation du fond, du champ plat, modulation,...) est pris en compte lors de l'étape finale qui consiste à utiliser :



- comme bruit de fond, des données réelles de champs obscurs obtenus dans les mêmes conditions que les observations (ceux-ci ont été acquis immédiatement avant ou après les acquisitions).
- comme sensibilité pixel à pixel, la sensibilité déduite d'un champ plat mesuré dans les conditions d'observation.
- comme estimateur du courant d'obscurité, la moyenne d'une série de champs obscurs (différents de ceux que l'on utilise pour le bruit de fond).
- comme estimateur du champ plat, la moyenne d'une série de champs plats (également différents des champs utilisés comme sensibilité).

Les images simulées subissent alors rigoureusement le même traitement que les données, et le centre de gravité est calculé de la même manière.

### 5.3.2 Comparaison avec les mesures

Le résultat des simulations est présenté figure 5.10. Celle-ci est à comparer avec les résultats obtenus avec les données (voir figure 5.8). Pour effectuer cette comparaison, je me place dans les mêmes conditions que pour les mesures. J'ajuste tout d'abord une droite sur la courbe tilt différentiel en fonction du tilt (voir tableau 5.16). Ceci est à comparer d'une part avec les pentes

$\lambda$ (nm)	673	505	404	337
673 – 505	-0,0104	-0,0104	-0,0102	-0,0100
673 – 404	-0,0241	-0,0239	-0,0237	-0,0232
673 – 337	-0,0416	-0,0412	-0,0407	-0,0400
505 – 404	-0,0137	-0,0135	-0,0134	-0,0132
505 – 337	-0,0312	-0,0308	-0,0304	-0,0300
404 – 337	-0,0175	-0,0173	-0,0170	-0,0168

TAB. 5.16 – *Pentes des droites ajustées au sens des moindres carrés sur les données simulées (centre de gravité calculé sur les images simulées).*

théoriques attendues et les pentes mesurées sur les données (tableau 5.7). Les simulations montrent que les pentes sont conformes aux pentes théorique.

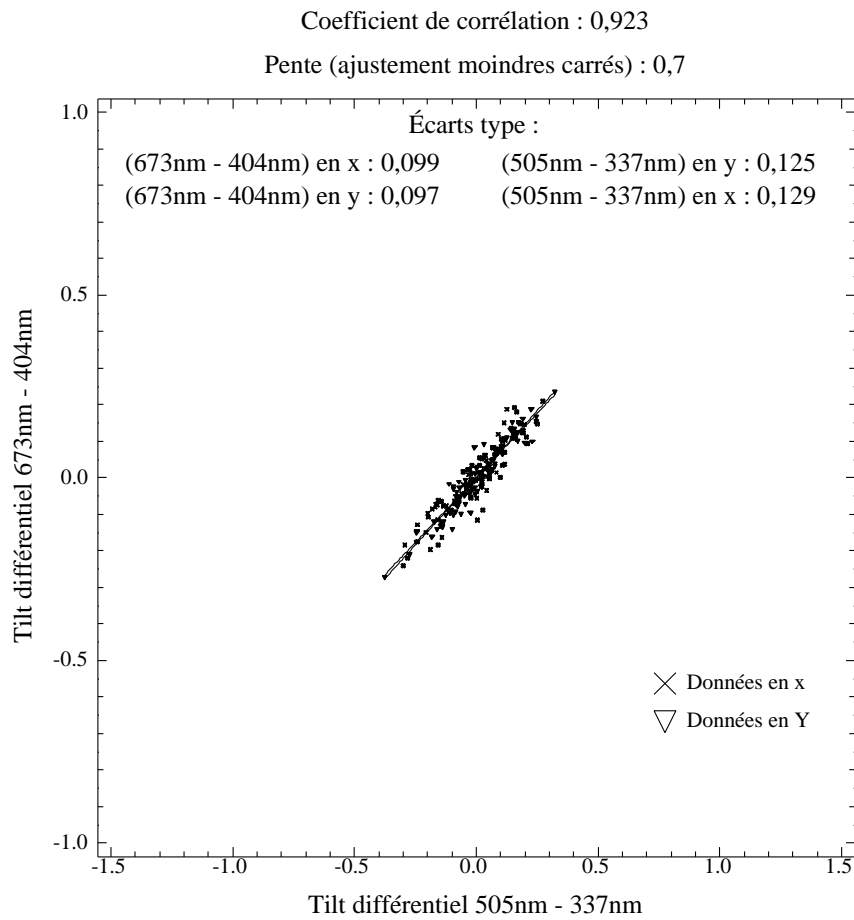


FIG. 5.10 – *Tilts différentiels mesurés sur les simulations, unité pixel. La pente mesurée est  $(n_{673} - n_{404})/(n_{505} - n_{337}) = 0,7$  contre 0,76 théoriquement.*

Ensuite j'estime l'erreur de mesure sur les simulations en calculant la moyenne quadratique des écarts entre la droite ajustée et les mesures sur les images simulées (voir tableau 5.17). Ces erreurs sont à comparer d'une part avec les erreurs sur les mesures (tableau 5.10) et celles

$\lambda$ (nm)	673	505	404	337
673		0,0161	0,0402	0,0372
505	0,0161		0,0354	0,0368
404	0,0402	0,0354		0,0428
337	0,0372	0,0368	0,0428	

TAB. 5.17 – *Erreur de mesure du centre de gravité sur les images simulées*

attendues (tableau 5.3). On peut remarquer que les erreurs sont proches de celles obtenues par les formules analytiques du chapitre 5.1. La différence avec les erreurs sur les mesure est donc très importante (un ordre de grandeur). Cette différence importante suggère qu'un phénomène masque la mesure du tilt différentiel : soit il s'agit d'un bruit qui n'a pas été pris en compte lors de la simulation et qui domine dans le cadre du centre de gravité, soit il s'agit d'un phénomène physique.

## 5.4 Conclusion

L'étude du centre de gravité a montré qu'avec cet estimateur, l'angle d'arrivée différentiel devait être mesurable malgré un rapport signal sur bruit faible ( $< 10$ ).

Le traitement des données MaTILD a mis en évidence le chromatisme du tilt. Cependant cette mesure n'a pas permis de mesurer l'effet avec la précision attendue. La dispersion des points de mesure est plus importante, d'un ordre de grandeur, sur les données que sur les simulations.

Cette différence peut avoir différentes origines :

- Soit un phénomène physique masque l'effet différentiel. L'hypothèse d'une variation, au cours des mesures, du chromatisme de l'indice de l'air a été avancée. En effet, les mesures ont été effectuées à l'Observatoire de Lyon après la tombée de la nuit, il n'est donc pas à exclure que la composition chimique de l'air ait changée. Mais étant donné l'importance

de la dispersion des points de mesures et la fréquence d'acquisition des images ( $0,2Hz$ ), cette hypothèse semble peut réaliste. De plus la pente théorique attendue est bien encadrée par les stimations sur les données.

- Soit il s'agit d'un effet d'anisoplanétisme chromatique qui conduit à des trajets différents dans la turbulence atmosphérique en fonction de la longueurs d'onde.
- Soit les simulations ne sont pas réalistes et le bruit de mesure est beaucoup plus important que prévu. Il est toutefois à noter que les simulations prennent en compte un maximum de phénomènes physiques dans le processus de formation des images.
- Soit il s'agit d'un problème lié à la méthode de mesure du centre de gravité, mais d'autres traitement « classiques » on étaient utilisés sur les données de l'expérience MaTilD sans réduire significativement la dispersions des points de mesures. L'ajustement de gaussiennes sur les images et l'intercorrélation des images monochromatique n'utilisent toutefois ici que les basses fréquences spatiales contenue dans l'image.

Pour tenter d'améliorer la précision de mesure, je me suis orienté vers le développement d'un autre traitement sur les données basé sur les méthodes d'ajustement de carte de phase. On utilise alors toute l'infomation contenue dans l'images (notament les hautes fréquences spatiales). Ce point est développé dans le chapitre suivant.



# Chapitre 6

## Ajustement d'un modèle de phase

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Ajustement d'un modèle sur les données . . . . .</b>	<b>107</b>
6.1.1	Notations . . . . .	107
6.1.2	Principe de l'ajustement d'un modèle . . . . .	108
<b>6.2</b>	<b>Maximum de vraisemblance . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>6.3</b>	<b>Les moindres carrés . . . . .</b>	<b>110</b>
6.3.1	Les moindres carrés linéaires . . . . .	111
6.3.2	Recherche itérative du maximum de vraisemblance . . . . .	112
6.3.3	Algorithme de Levenberg-Marquardt . . . . .	115
<b>6.4</b>	<b>Optimisation dans un sous-espace de l'espace des paramètres . . . . .</b>	<b>117</b>
<b>6.5</b>	<b>Application aux images MaTilD : détermination du tilt . . . . .</b>	<b>119</b>
6.5.1	Modèle des images . . . . .	120
6.5.2	Algorithme . . . . .	125
6.5.3	Gradient et matrice jacobienne . . . . .	127
6.5.4	Gradient . . . . .	127
6.5.5	Matrice jacobienne . . . . .	129
6.5.6	Résultats . . . . .	129
6.5.7	Lissage . . . . .	131
6.5.8	Conclusions . . . . .	134

---

L'étude précédente sur la mesure des angles d'arrivée a montré pour la première fois le chromatisme du tilt. Toutefois la précision obtenue est nettement inférieure à ce que prédit l'étude théorique et reste insuffisante pour permettre la correction du tilt dans le cadre de l'étoile laser polychromatique. L'origine des erreurs de mesure n'est pas clairement identifiée. C'est pourquoi j'ai également développé une méthode de mesure des tilts, basée sur l'ajustement d'un modèle sur les images MaTilD. Cette méthode présente l'avantage de considérer toutes les longueurs d'onde simultanément (*i.e.*, sans fenêtrage et en rendant compte du chevauchement des images) et d'utiliser au mieux l'information contenue dans l'image. En effet, toutes les fréquences spatiales jusqu'à la fréquence de coupure du système ( $D/\lambda$ ) sont utilisées et pas seulement la fréquence nulle comme pour le centre de gravité. On s'attend donc à ce que le traitement soit plus performant puisqu'il utilise une plus grande quantité d'informations disponibles dans les données. En outre, le bruit du détecteur ne perturbe pas directement la mesure mais fait varier la « confiance » que l'on peut avoir en les données : plus les données sont bruitées, moins la valeur obtenue est représentative du phénomène mesuré.

J'ai choisi d'ajuster une différence d'épaisseur optique dans le plan pupille. Le modèle retenu est modal (voir chapitre 2.2). Les deux premiers modes du modèle étant le tip-tilt. Ceci présente l'avantage de ne nécessiter qu'un seul jeu de paramètres pour toutes les longueurs d'onde : les phases correspondant aux diverses longueurs d'onde sont obtenues en

- « zoomant » (*i.e.*, par interpolation),
- appliquant un facteur d'amplitude sur la différence d'épaisseur optique (dépendant de la longueur d'onde et de l'indice de réfraction à cette longueur d'onde).

En disposant des cartes de phases pour chaque longueur d'onde, je peux alors calculer l'image correspondante (somme des images monochromatiques) et la comparer aux données. Il est à noter qu'un modèle des images dans l'espace direct (*i.e.*, dans l'espace des données par opposition à l'espace de Fourier) nécessite, *a priori*, autant de jeux de paramètres que de longueurs d'onde, la forme de l'image étant fonction de la longueur d'onde : les tavelures sont les interférences

multiples de la surface d'onde.

Avant de décrire plus en détails le travail spécifique que j'ai effectué sur les données MaTilD, je vais présenter de façon générale les méthodes d'ajustement de modèles sur des données.

## 6.1 Ajustement d'un modèle sur les données

L'ajustement d'un modèle (fonction de plusieurs paramètres) sur des données consiste à trouver le jeu de paramètres (appelé jeu « optimal ») pour lequel le modèle est le plus vraisemblable. Le jeu optimal va dépendre de la définition de la « vraisemblance » entre modèle et données. Celle-ci peut-être définie au travers d'une distance entre les données et le modèle (dans le cas des moindres carrés, c'est la norme euclidienne qui est utilisée). Généralement plus cette distance est faible plus le modèle est vraisemblable compte tenu des données.

Tout d'abord, je décrirai une méthode générale qui permet de trouver ce jeu optimal de paramètres.

### 6.1.1 Notations

Les notations utilisées dans ce chapitre sont les suivantes :

Symbole	Définition
$\mathbf{d} = \{d_i, i = 1, 2, \dots, M\}$	vecteur des données
$\mathbf{p} = \{p_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N\}$	paramètres du modèle
$Pr(a)$	probabilité de la variable aléatoire $a$
$Pr(a b)$	probabilité conditionnelle de $a$ sachant $b$
$C_d = [Cov(d_i, d_j)]$	matrice de covariance des données
$\mathbf{m}(\mathbf{p}) = \{m_i(\mathbf{p}), i = 1, 2, \dots, M\}$	modèle des données fonction de $\mathbf{p}$
$\arg \min_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x})$	vecteur $\mathbf{x}$ pour lequel $F(\mathbf{x})$ est minimale.
$\nabla f(\mathbf{x}) = [\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})]$	gradient de $f(\mathbf{x})$

La covariance de deux variables  $x$  et  $y$  est définie par :  $Cov(x, y) = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle$ .



### 6.1.2 Principe de l'ajustement d'un modèle

Le jeu de paramètres  $\mathbf{p}_{optim}$  est optimal si il minimise la « distance » entre le modèle et les données. On construit, pour mesurer cette distance, une fonction appelée fonction de pénalisation  $Q(\mathbf{p}|\mathbf{d})$  telle que :

$$\mathbf{p}_{optim} = \arg \min_{\mathbf{p}} Q(\mathbf{p}|\mathbf{d}) \quad (6.1)$$

Elle prend en compte les différentes contraintes que l'on veut porter sur le modèle. On peut généralement les diviser en deux catégories :

- les contraintes *a priori* qui sont données par le choix du modèle, par exemple les intervalles de validité des paramètres.
- les contraintes *a posteriori* que l'on apporte lorsque l'on a une meilleure connaissance des données, comme par exemple la positivité du modèle dans le cas d'images.

Ces deux types de contraintes étant indépendantes, on peut décomposer la fonction  $Q(\mathbf{p}|\mathbf{d})$  en deux termes (voir chapitre 6.2) :

$$Q(\mathbf{p}|\mathbf{d}) = L[\mathbf{d}|\mathbf{p}] + \mu R(\mathbf{p}) \quad (6.2)$$

Les contraintes *a posteriori* sont représentées par la densité de probabilité  $L$  qui mesure l'écart entre le modèle et les données.  $L$  est appelé le terme de vraisemblance. La densité de probabilité  $R$  est l'écart entre les paramètres et les contraintes *a priori*. Le paramètre scalaire  $\mu$  est un paramètre de Lagrange. Il règle le poids respectif que l'on donne aux contraintes *a priori* et *a posteriori*.

Dans le cas général où on cherche le modèle qui représente le mieux des données bruitées, le choix du paramètre  $\mu$  est important. Plus le paramètre de Lagrange est important plus on porte d'intérêt aux contraintes *a priori*. Le jeu optimal de paramètres trouvé sera donc proche du jeu de paramètres qui décrit l'ensemble des contraintes *a priori*. Par contre, lorsque le paramètre de Lagrange est faible, on porte plus d'intérêt à la vraisemblance entre le modèles et les données. Par exemple dans le cas où on recherche une fonction lisse dans des données bruitées, plus  $\mu$  sera élevé plus le modèle sera lisse, plus  $\mu$  sera faible plus le modèle sera « rugueux » (il tiendra compte du bruit ou des structures fines existant dans les données). Le choix de la valeur de ce paramètre peut se révéler critique[52, 53].

L'ajustement d'un modèle sur des données est donc équivalent au problème de recherche dans l'espace des paramètres du minimum absolu d'une fonction. Ceci peut être très simple, par exemple dans le cas où la fonction  $Q$  est quadratique par rapport aux paramètres. On a alors un seul minimum, qui peut s'exprimer de manière analytique. Mais le problème est plus ardu lorsque la fonction présente de nombreux minima locaux et/ou un grand nombre de paramètres.

Je ne cherche pas ici à être exhaustif. Je présenterai l'ajustement de modèle dans le cas du maximum de vraisemblance pour les cas où la fonction de pénalisation est du type « moindres carrés<sup>1</sup> ». Le cas simple des moindres carrés linéaires sera présenté (fonction quadratique). Puis je m'intéresserai au cas des moindres carrés non-linéaires, pour lesquels une recherche du minimum par itération est nécessaire. Je m'intéresserai alors à une nouvelle méthode, proposée par É. Thiébaud<sup>2</sup>, qui permet de traiter les cas où le nombre de paramètres est très important : la recherche du minimum dans un sous-espace des paramètres.

## 6.2 Maximum de vraisemblance

Les méthodes basées sur le maximum de vraisemblance désignent, de façon générale, les algorithmes qui cherchent à maximiser la probabilité  $Pr(\mathbf{p}|\mathbf{d})$  d'obtenir les paramètres connaissant les données :

$$\mathbf{p}_{optim} = \arg \max_{\mathbf{p}} Pr(\mathbf{p}|\mathbf{d}) \quad (6.3)$$

Le théorème de Bayes sur les probabilités conjuguées donne :

$$Pr(\mathbf{p}|\mathbf{d}) = \frac{Pr(\mathbf{d}|\mathbf{p})Pr(\mathbf{p})}{Pr(\mathbf{d})} \quad (6.4)$$

Les probabilités étant comprises entre 0 et 1, la recherche du maximum de  $Pr(\mathbf{p}|\mathbf{d})$  est équivalente à la recherche du minimum de  $-\log(Pr(\mathbf{p}|\mathbf{d}))$ . Cette transformation, appliquée sur l'équation (6.4) permet d'écrire la fonction à minimiser comme la somme de deux fonctions (il est à remarquer que  $Pr(\mathbf{d})$  étant indépendante des paramètres, elle n'intervient pas dans la

<sup>1</sup>Dans le cas des moindres carrés, le terme de vraisemblance est la moyenne quadratique pondérée de la différence entre le modèle et les données

<sup>2</sup>CRAL / Observatoire de Lyon, thiebaut@obs.univ-lyon1.fr

recherche du minimum).

$$\mathbf{p}_{optim} = \arg \min_{\mathbf{p}} \left[ -\log(Pr(\mathbf{d}|\mathbf{p})) - \log(Pr(\mathbf{p})) \right] \quad (6.5)$$

En identifiant ceci à l'expression générale de la fonction de pénalisation  $Q$  (6.2), on obtient :

$$\begin{cases} L(\mathbf{d}|\mathbf{p}) \propto -\log(Pr(\mathbf{d}|\mathbf{p})) + cste \\ \mu R(\mathbf{p}) \propto -\log(Pr(\mathbf{p})) + cste \end{cases} \quad (6.6)$$

Étant donné que l'on cherche le minimum de  $Q$ , les constantes présentes dans les expressions de  $L$  et de  $R$  n'interviennent pas. Elles seront dans la suite considérées comme nulles. Dans le cas où les données sont connues à une erreur près, qui suit une loi de probabilité gaussienne, la fonction  $L$  s'écrit :

$$L(\mathbf{d}|\mathbf{p}) = \frac{1}{2} [\mathbf{d} - \mathbf{m}(\mathbf{p})]^\perp \cdot \mathbf{C}_d^{-1} \cdot [\mathbf{d} - \mathbf{m}(\mathbf{p})] \quad (6.7)$$

On reconnaît ici l'expression du critère des moindres carrés pondérés, qui dans le cas de données statistiquement indépendantes ( $\mathbf{C}_p^{-1}$  diagonale), s'écrit sous la forme :

$$L(\mathbf{d}|\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^M \frac{|d_i - m_i|^2}{2\sigma_i^2} \quad (6.8)$$

### 6.3 Les moindres carrés

Je me restreins ici aux fonctions de pénalisation du type maximum de vraisemblance et du type moindres carrés (voir équation (6.8)). Dans l'étude suivante, je vais distinguer deux cas :

- les moindres carrés linéaires : c'est à dire lorsque  $\mathbf{m}(\mathbf{p})$  est une fonction linéaire de  $\mathbf{p}$ . La solution peut alors être obtenue analytiquement.
- le cas général et en particulier les moindres carrés non-linéaires ( $\mathbf{m}(\mathbf{p})$  est une fonction non-linéaire de  $\mathbf{p}$ ). La solution ne peut, en général, pas être obtenue analytiquement ou bien son calcul est trop coûteux en temps de calcul. Les méthodes itératives de recherche du maximum de vraisemblance sont alors utilisées.

Dans le cadre des moindres carrés, on choisit d'écrire les contraintes *a priori* sur les paramètres comme un moindre carré. On définit alors le jeu de paramètres  $\mathbf{p}_0$  qui permet au modèle de

rendre compte des contraintes :

$$\mu R(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} [\mathbf{p} - \mathbf{p}_0]^\perp \cdot C_{\mathbf{p}}^{-1} \cdot [\mathbf{p} - \mathbf{p}_0] \quad (6.9)$$

Il s'agit ici du choix d'une norme pour mesurer les contraintes *a priori*. Le choix d'un terme de type moindres carrés conditionne la loi de probabilité des paramètres à être gaussienne, ce qui peut paraître restrictif, mais conduit généralement à des résultats corrects, même lorsque le théorème centrale limite ne s'applique pas. Dans la suite, je noterai la fonction de pénalisation  $Q(\mathbf{p})$  et je la prendrai égale à :

$$Q(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} [\mathbf{d} - \mathbf{m}(\mathbf{p})]^\perp \cdot C_{\mathbf{d}}^{-1} \cdot [\mathbf{d} - \mathbf{m}(\mathbf{p})] + \frac{1}{2} [\mathbf{p} - \mathbf{p}_0]^\perp \cdot C_{\mathbf{p}}^{-1} \cdot [\mathbf{p} - \mathbf{p}_0] \quad (6.10)$$

### 6.3.1 Les moindres carrés linéaires

Le modèle est une fonction linéaire des paramètres :  $m_i = \sum_{\alpha} W_{i\alpha} p_{\alpha}$  ou sous forme matricielle :  $\mathbf{m} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{p}$ . La solution est alors unique, en effet, si l'inverse de la matrice de covariance des paramètres  $C_{\mathbf{p}}^{-1}$  est positive :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial p_{\alpha} \partial p_{\beta}} = \mathbf{W}^\perp \cdot C_{\mathbf{d}}^{-1} \cdot \mathbf{W} + C_{\mathbf{p}}^{-1} > 0 \quad \forall \alpha, \beta = 1, \dots, N \quad (6.11)$$

Ceci implique que  $Q$  est strictement convexe. Dans le cas général, si on est en un minimum, alors la dérivée de  $Q$  s'annule. Dans le cas des moindres carrés linéaires, le fait que  $Q$  soit convexe partout assure que, si la dérivée est nulle, alors on est en un minimum et comme  $Q$  est convexe partout, ce minimum est unique :

$$\mathbf{p}_{optim} = \arg \min_{\mathbf{p}} Q(\mathbf{p}) \iff \frac{\partial Q}{\partial p_{\alpha}^{optim}} = 0 \quad \forall \alpha = 1, \dots, N \quad (6.12)$$

Dans la suite,  $\nabla Q$  désigne le gradient de  $Q$  par rapport aux paramètres  $p_{\alpha}$ . En substituant  $\mathbf{m}$  par  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{p}$  dans l'équation (6.10), on trouve d'après l'équation (6.12) que le jeu optimal de paramètres est solution de l'équation :

$$\nabla Q = -\mathbf{W}^\perp \cdot C_{\mathbf{d}}^{-1} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{p}) + C_{\mathbf{p}}^{-1} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = 0 \quad (6.13)$$

La solution de cette équation est celle d'un problème linéaire  $A \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$  invoquant l'inversion de la matrice  $A$  :

$$\underbrace{\left[ \mathbf{W}^\perp \cdot C_{\mathbf{d}}^{-1} \cdot \mathbf{W} + C_{\mathbf{p}}^{-1} \right]}_A \cdot \mathbf{p}_{optim} = \underbrace{\left[ \mathbf{W}^\perp \cdot C_{\mathbf{d}}^{-1} \cdot \mathbf{d} + C_{\mathbf{p}}^{-1} \cdot \mathbf{p}_0 \right]}_{\mathbf{b}} \quad (6.14)$$

La matrice  $A$  est une matrice carrée de dimensions  $N \times N$ . Pour des matrices de grande taille, l'inversion peut se révéler difficile ou très coûteuse en temps de calcul. Il peut alors être judicieux d'utiliser les méthodes itératives de recherche de minimum telles que celle utilisée dans le cas des moindres carrés non-linéaires. On est toutefois dans le cas favorable où il n'y a qu'un seul minimum et où la fonction est partout convexe.

### 6.3.2 Recherche itérative du maximum de vraisemblance

Je considère ici le cas où le minimum absolu de la fonction  $Q$  ne peut pas être obtenu analytiquement ou bien où le calcul direct dépasse les ressources de la machine. Ce problème est très général et de nombreuses méthodes sont actuellement développées pour le résoudre (méthode de descente, recherche globale, etc[54]). Je m'intéresse à la forme générale du problème, lorsque le modèle est non-linéaire et je présente la méthode de descente vers le minimum du type Newton.

#### Forme générale du problème

Pour rechercher le minimum de la fonction de pénalisation, on peut procéder par itération de la manière suivante :

1. On se place en un point  $\mathbf{p}$  de l'espace des paramètres.
2. On connaît alors la valeur de la fonction de pénalisation  $Q(\mathbf{p})$  en ce point.
3. On cherche un pas à effectuer dans l'espace des paramètres :  $\delta\mathbf{p}$  tel que  $Q(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}) < Q(\mathbf{p})$ .
4. On se place au point  $\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}$  de l'espace des paramètres et on itère le processus

La clef de ces méthodes itératives réside dans la détermination du pas  $\delta \mathbf{p}$ . Je présente ici la méthode calquée sur la méthode de Newton, utilisée pour la recherche du zéro d'une fonction continue.

### Approximation quadratique

Dans le cas qui nous intéresse, on recherche un point stationnaire de la fonction de pénalisation  $Q$  ( $\nabla Q = 0$ ). Pour cela, on effectue un développement à l'ordre 2 de  $Q$ . En effet, le terme d'ordre 1 donne la direction de recherche (ligne de plus grande pente), mais c'est le terme d'ordre 2 qui permet d'estimer la longueur du pas à effectuer (courbure de la fonction).

$$Q(\mathbf{p} + \delta \mathbf{p}) = Q(\mathbf{p}) + \delta \mathbf{p}^\perp \cdot \nabla Q + \frac{1}{2} \delta \mathbf{p}^\perp \cdot \nabla \nabla Q \cdot \delta \mathbf{p} + \mathcal{O} \|\delta \mathbf{p}^3\| \quad (6.15)$$

où  $\nabla \nabla Q$  désigne la matrice hessienne de  $Q$  : matrice des dérivées secondes par rapport aux paramètres.

L'approximation quadratique consiste à négliger le terme  $\mathcal{O} \|\delta \mathbf{p}^3\|$ , c'est à dire les variations de courbures. Pour une fonction quadratique, le pas optimal est solution de l'équation linéaire :

$$\nabla Q \cdot \delta \mathbf{p}_{Newton} = -\nabla Q \text{ soit : } \delta \mathbf{p}_{Newton} = \nabla \nabla Q^{-1} \cdot \nabla Q \quad (6.16)$$

Mais dans le cas général où  $Q$  n'est pas quadratique, l'approximation «  $\mathcal{O} (\|\delta \mathbf{p}\|^3)$  négligeable », n'est valable que localement. Elle ne sera donc justifiée que pour des pas  $\delta \mathbf{p}$  petits, pour lesquels la courbure ne varie pas significativement. La minimisation de la forme approchée de  $Q$  doit donc se faire sous la contrainte *a priori* :  $\delta \mathbf{p}$  petit. Le poids de cette contrainte par rapport à la minimisation de  $Q$  est réglé par l'introduction d'un paramètre de Lagrange  $\lambda > 0$ . Le problème revient donc à trouver le jeu de paramètres  $\mathbf{p}_\lambda$  qui vérifie :

$$\mathbf{p}_\lambda = \arg \min_{\mathbf{p}} \left[ \underbrace{Q(\mathbf{p})}_{=cste} + \delta \mathbf{p}^\perp \cdot \nabla Q + \frac{1}{2} \delta \mathbf{p}^\perp \cdot \nabla \nabla Q \cdot \delta \mathbf{p} + \lambda \|\delta \mathbf{p}\|^2 \right] \quad (6.17)$$

On peut remarquer qu'une valeur élevée de  $\lambda$  impose une contrainte forte sur la longueur du pas  $\|\delta \mathbf{p}\|^2$  par rapport à la minimisation de  $Q$  (le pas sera alors très petit), alors qu'une valeur faible donne, inversement, plus d'importance à la minimisation de  $Q$  (la longueur du pas n'intervenant que très peu). Il est à noter que  $\|\delta \mathbf{p}\|$  est une mesure de la norme de  $\delta \mathbf{p}$  qui peut-être définie par

exemple par :

$$\|\delta \mathbf{p}\|^2 = \frac{1}{2} \delta \mathbf{p}^\perp \cdot D \cdot \delta \mathbf{p} \quad (6.18)$$

où  $D$  est une matrice symétrique définie positive (nous verrons plus loin comment choisir  $D$  de façon judicieuse).

La solution du problème local posé par l'équation (6.17) est donnée par :

$$\delta \mathbf{p}_\lambda = \left( \nabla \nabla Q + \lambda D \right)^{-1} \cdot \nabla Q \quad (6.19)$$

avec  $\lambda$  tel que  $Q(\mathbf{p} + \delta \mathbf{p}_\lambda) < Q(\mathbf{p})$ . Il faut également remarquer que cette solution est basée sur le développement de Taylor de la fonction de pénalisation. Il est donc nécessaire que cette fonction soit suffisamment lisse pour justifier ce développement : au moins de classe  $\mathcal{C}^2$ .

### Choix de la norme : $\|\delta \mathbf{p}\|$

Le choix judicieux de la norme  $\|\delta \mathbf{p}\|$  et donc de la matrice  $D$  de l'équation (6.18) peut-être fait en tenant compte d'un certain nombre de critères imposés à cette matrice :

- $Q$ ,  $\delta \mathbf{p}^\perp \cdot \nabla Q$  et  $\delta \mathbf{p}^\perp \cdot \nabla \nabla Q \cdot \delta \mathbf{p}$  sont sans dimension, il doit donc en être de même pour le terme  $\lambda \delta \mathbf{p}^\perp \cdot D \cdot \delta \mathbf{p}$ . Comme  $\lambda$  est sans dimension,  $D$  doit avoir la dimension de  $[p^{-2}]$ , c'est le cas de la diagonale de la matrice hessienne.
- Si on ne veut pas introduire de corrélation entre les paramètres via cette contrainte, il faut prendre  $D$  diagonale.
- La pondération doit être plus forte pour les paramètres pour lesquels l'approximation quadratique est la plus restrictive. Si la fonction  $Q$  est suffisamment lisse, on s'attend à ce que la variation de courbure soit plus importante, en valeur absolue, pour les termes à fortes courbures (la courbure de  $Q$  par rapport à  $\mathbf{p}$  étant mesurée par  $\nabla \nabla Q$ ).
- Invariance par changement d'échelle : la norme de  $\delta \mathbf{p}$  doit être invariante par un changement d'unité des paramètres : si  $p'_\alpha = \beta_\alpha p_\alpha$  avec  $\beta_\alpha$  scalaire, alors il faut que  $\|\delta \mathbf{p}'_\alpha\| = \|\delta \mathbf{p}_\alpha\|$

Les quatre critères précédents conduisent à choisir pour  $D$  la diagonale de la matrice hessienne :

$$D_{\alpha,\alpha} \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2 Q}{\partial p_\alpha^2} \quad (6.20)$$

La norme de  $\delta \mathbf{p}$  est donc donnée par :

$$\|\delta \mathbf{p}\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} p_{\alpha}^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial p_{\alpha}^2} \quad (6.21)$$

### Remarques importantes

Il est intéressant de remarquer qu'avec le choix de la norme qui a été fait, l'augmentation du paramètre de Lagrange n'empêche pas la minimisation de la fonction de pénalisation sous contraintes :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \delta \mathbf{p}_{\lambda, \alpha} = \left( -(\lambda D)^{-1} \cdot \nabla Q \right)_{\alpha} = -\frac{1}{\lambda D_{\alpha, \alpha}} \frac{\partial Q}{\partial p_{\alpha}} \quad (6.22)$$

Comme les éléments diagonaux de  $D$  sont positifs (au voisinage du minimum :  $\frac{\partial^2 Q}{\partial p_{\alpha}^2} > 0$ ), lorsque  $\lambda$  devient très grand, cela revient à faire un petit pas dans la direction de plus grande pente (*i.e.*, dans la direction opposée au gradient :  $-\nabla Q$ ). La fonction de pénalisation diminuera donc toujours pour un pas suffisamment petit. Par contre le chemin suivi ne sera pas optimal en terme de temps de calcul.

Il faut également remarquer que le minimum trouvé ne sera pas forcément le minimum absolu de la fonction : dans le cas où la fonction  $Q$  présente plusieurs minima locaux, le résultat dépendant alors du point de départ (celui-ci peut d'ailleurs être critique) et du chemin suivi dans l'espace des paramètres. Ce chemin est lié en grande partie aux conditions initiales, mais aussi au paramètre de Lagrange  $\lambda$  utilisé pour l'approximation quadratique.

### 6.3.3 Algorithme de Levenberg-Marquardt

O vient de voir qu'il fallait connaître  $Q$ ,  $\nabla Q$  et  $\nabla \nabla Q$  pour effectuer la minimisation. Mais la quantité  $\nabla \nabla Q$  peut-être difficilement calculable à chaque itération, soit parce qu'on ne dispose pas de son expression analytique, soit parce que son calcul est trop coûteux en temps de calcul. L'algorithme de Levenberg-Marquardt se base sur une approximation locale de la matrice hessienne. Il peut être appliqué à des fonctions de pénalisation du type somme de carrés :

$$Q = \frac{1}{2} [\mathbf{d} - \mathbf{m}(\mathbf{p})]^{\perp} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{d}}^{-1} \cdot [\mathbf{d} - \mathbf{m}(\mathbf{p})] + \frac{1}{2} [\mathbf{p} - \mathbf{p}_0]^{\perp} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1} \cdot [\mathbf{p} - \mathbf{p}_0] \quad (6.23)$$



Afin de simplifier les notations, je noterai dans la suite  $\mathbf{m}$  le modèle dépendant des paramètres  $\mathbf{p}$  au lieu de  $\mathbf{m}(\mathbf{p})$ . Le gradient de  $Q$  par rapport aux paramètres est alors donné par :

$$\nabla Q = J^\perp \cdot C_{\mathbf{d}}^{-1} \cdot [\mathbf{d} - \mathbf{m}] + C_{\mathbf{p}}^{-1} \cdot [\mathbf{p} - \mathbf{p}_0] \quad (6.24)$$

Avec  $J$  la matrice jacobienne du modèle par rapport aux paramètres :

$$J_{i\alpha} = \frac{\partial m_i}{\partial p_\alpha} \quad (6.25)$$

On peut remarquer que, dans le cas d'un modèle linéaire, la matrice jacobienne est la matrice des poids des paramètres ( $\mathbf{W}$ ).

De l'équation précédente, on déduit la matrice hessienne :

$$\begin{aligned} [H_{\alpha\beta}] &= [\nabla\nabla Q]_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 Q}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \\ &= \sum_{ij} \frac{\partial m_i}{\partial p_\alpha} [C_{\mathbf{d}}^{-1}]_{ij} \frac{\partial m_j}{\partial p_\beta} + [C_{\mathbf{p}}^{-1}]_{\alpha\beta} \\ &\quad - \sum_{ij} [C_{\mathbf{d}}^{-1}]_{ij} \frac{\partial^2 m_i}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} [d_j - m_j] \end{aligned} \quad (6.26)$$

L'approximation de Levenberg-Marquardt consiste à négliger le dernier terme de la matrice hessienne. Cette approximation est justifiée par le fait que le vecteur des résidus  $[d_j - m_j]$  tend vers une variable aléatoire centrée (pour un modèle correct). Donc la somme suivante est presque nulle :  $\sum_{ij} [C_{\mathbf{d}}^{-1}]_{ij} \frac{\partial^2 m_i}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} [d_j - m_j]$ . De plus, de par son caractère aléatoire, ce terme risque de perturber la convergence.

Dans la suite, la matrice hessienne sera donc approximée par :

$$\nabla\nabla Q \approx C_{\mathbf{p}}^{-1} + J^\perp \cdot C_{\mathbf{d}}^{-1} \cdot J \quad (6.27)$$

La minimisation de la fonction de pénalisation se fait alors en introduisant cette approximation dans le calcul du pas (voir l'équation (6.19)). À chaque pas de la minimisation, il faut calculer la fonction de pénalisation  $Q$ , sa matrice jacobienne  $J$  et l'approximation de la matrice hessienne. Cette méthode est classiquement utilisée pour l'ajustement de modèles non-linéaires sur des données : l'algorithme est implémentée dans la plupart des logiciels de calcul.

## 6.4 Optimisation dans un sous-espace de l'espace des paramètres

L'algorithme de Levenberg-Marquardt se révèle très puissant pour les fonctions non-linéaires avec un nombre restreint de paramètres. Mais lorsque ce nombre augmente, le calcul de la matrice jacobienne  $J$  devient long et l'espace mémoire nécessaire pour stocker cette information croît avec le nombre de paramètres (matrice rectangulaire de taille  $M \times N$ ). Afin de limiter la quantité d'information à stocker, Éric Thiébaud<sup>3</sup> m'a proposé une nouvelle méthode. Il s'agit d'effectuer la recherche du minimum non pas directement dans l'espace des paramètres, mais dans un sous-espace. Le choix de ce sous-espace se fait naturellement en considérant, d'une part la direction du gradient (qui représente localement la direction optimale pour la minimisation) et d'autre part la ou les directions précédentes (c'est à dire le pas effectué dans l'espace des paramètres, voir figure 6.1. Dans le cadre de cette approche, les paramètres à ajuster à chaque itération ne sont plus directement les paramètres du modèle dans leur ensemble, mais les poids des directions définissant le sous-espace de minimisation (dans le cas de la figure 6.1-(b), le poids du gradient et le poids du pas précédent). Ces directions étant des combinaisons linéaires des paramètres du modèle, on obtient à la fin de l'itération la coordonnée d'un point dans le sous-espace des paramètres et donc un nouveau jeu de paramètres. Le pas à effectuer à l'itération  $n$  dans le sous-espace s'écrit :

$$\delta \mathbf{p}^{(n)} = \alpha \nabla Q + \beta \delta \mathbf{p}^{(n-1)} + \gamma \delta \mathbf{p}^{(n-2)} + \dots = \alpha \nabla Q + \sum_{i=1}^{(n-1)} c_i \delta \mathbf{p}^{(i)} \quad (6.28)$$

où  $\delta \mathbf{p}^{(i)}$  désigne le pas effectué à l'itération  $i$ .

On cherche donc le jeu optimal des poids  $\{\alpha^{opt}, \beta^{opt}, \gamma^{opt}, \dots\}$  qui donne le pas à effectuer dans le sous-espace pour minimiser la fonction de pénalisation (toujours dans ce sous-espace). Dans le cas où il n'y a pas de contrainte *a priori* ( $C_{\mathbf{p}}^{-1} = 0$ ) et où l'approximation de Levenberg-Marquardt est utilisée pour approximer la matrice hessienne, le pas optimal  $\delta \mathbf{p}$  est une combinaison linéaire du pas le long des directions du sous-espace :  $\delta \mathbf{p} = \sum_{\theta} c_{\theta} \delta \mathbf{p}_{\theta}$ .  $\delta \mathbf{p}$  est la solution

---

<sup>3</sup>CRAL /Observatoire de Lyon, thiebaut@obs.univ-lyon1.fr

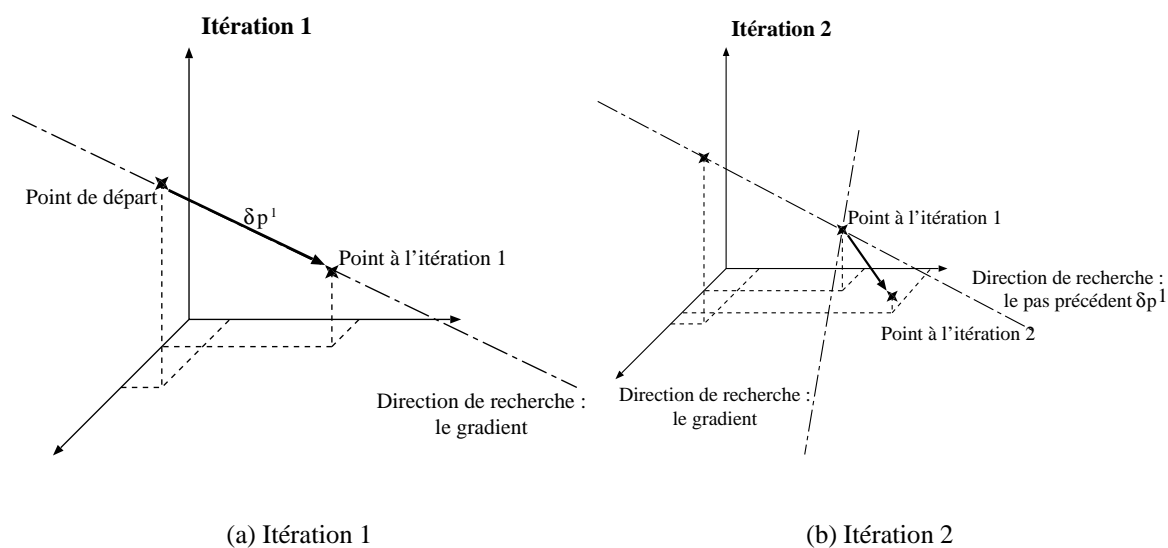


FIG. 6.1 – *Minimisation dans un sous-espace de l'espace des paramètres. Itération 1, le sous-espace de recherche est donné par le gradient. Itération 2, le sous-espace de recherche est donné par le gradient et le pas précédent  $\delta p^{(1)}$ .*

de l'équation linéaire :  $A_\lambda \cdot \delta \mathbf{p} = \mathbf{b}$  avec :

$$\begin{aligned} [A_\lambda]_{\theta\xi} &= \sum_k w_k J_{k\theta} J_{k\xi} (1 + \lambda \delta_{\theta\xi}) \\ b_\theta &= \sum_i w_i (d_i - m_i) J_{i\theta} \end{aligned} \quad (6.29)$$

où  $\delta_{\theta\xi}$  est le symbole de Kronecker.

La matrice  $J$  étant à présent la matrice jacobienne dans le sous-espace de minimisation, on a :

$$J_{i\theta} = \sum_\alpha \frac{\partial m_i}{\partial p_\alpha} [\delta \mathbf{p}_\theta]_\alpha \quad (6.30)$$

Le nombre de directions  $N_{dir}$  à conserver (la dimension du sous-espace de minimisation est  $N_{dir} + 1$ ) est faible. Toutefois, l'utilisation du gradient seul ne fournit pas un chemin efficace<sup>4</sup> et peut créer éventuellement des « retours en arrière ». Ceux-ci sont fortement limités en conservant au moins la direction du pas de l'itération précédente  $\delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^{(n)} - \mathbf{p}^{(n-1)}$ . Le gain obtenu en conservant plus de deux directions (en plus du gradient) n'est pas vraiment significatif.

La minimisation dans un sous-espace est particulièrement intéressante lorsque le nombre de paramètres du modèle est important et lorsque la dimension du sous-espace de minimisation reste petite (typiquement  $N_{dir} = 2$ ). En effet pour chaque pas de la minimisation, il faut calculer le modèle et son gradient (comme pour l'algorithme de Levenberg-Marquardt). Mais, le gain sur la dimension de matrice jacobienne  $J_{i\theta}$  est d'autant plus grand que le nombre de paramètres est important :  $M \times N_{dir}$  au lieu de  $M \times N$ . De plus, la matrice  $[A_\lambda]_{\theta\xi}$  (à inverser pour obtenir le pas optimal dans le sous-espace) est de faible taille  $N_{dir} \times N_{dir}$ . Cette méthode permet donc un gain significatif en termes de temps de calcul et de place mémoire requise.

## 6.5 Application aux images MaTilD : détermination du tilt

J'ai appliqué la méthode décrite précédemment à l'ajustement d'un modèle d'image sur les images MaTilD. Cette méthode permet de déterminer les tilts des différentes images mono-

---

<sup>4</sup>On est alors dans le cadre de la méthode de la plus grande pente qui cherche localement le minimum le long de la ligne de plus grande pente *i.e.*, le gradient local

chromatiques du trou source. La modélisation a été développée au sein de l'équipe Airi (Éric Thiébaud, Michel Tallon et moi-même, voir chapitre 6.4).

Le modèle retenu se base sur la formation des images dans l'instrument MaTilD : à partir d'une surface d'onde perturbée par l'atmosphère, les images monochromatiques sont formées sur un capteur d'image. Comme je l'ai mentionné précédemment, le choix de cette modélisation dans le plan pupille plutôt que dans le plan image se justifie par le fait qu'une seule différence d'épaisseur optique permet de générer les images à toutes les longueurs d'onde. À l'inverse, un modèle dans le plan image change en fonction de la longueur d'onde car la forme des tavelures dépend de la longueur d'onde (interférences multiples de la surface d'onde). Nous avons ensuite choisi de modéliser cette surface d'onde de façon modale toujours pour permettre de changer facilement de longueur d'onde (un mode ne change pas de forme avec la longueur d'onde) et parce que le tilt à mesurer est un mode particulier de la surface d'onde.

Avec cette modélisation, le problème de chevauchement des images monochromatiques est pris en compte et ne vient pas perturber (en théorie) l'ajustement. De plus, il n'est plus nécessaire de fenêtrer l'image pour en extraire une sous-image car la surface d'onde permet de reconstruire l'image entière.

L'algorithme choisi nécessite le calcul explicite du modèle et du gradient à chaque itération. Je vais donc tout d'abord expliciter le modèle sélectionné. J'en dériverai ensuite le gradient.

### 6.5.1 Modèle des images

Tout comme pour les simulations de la partie § 5.3, le modèle reproduit la formation des images par l'instrument de l'expérience MaTilD : une trame est la superposition incohérente des images quasi-monochromatiques dispersées d'un trou source vu à travers la turbulence atmosphérique (voir la figure 6.2). Ici je considère un modèle (et des données) à deux dimension. Je choisis donc de les indexer par la variable discrète :  $\mathbf{x}$ , qui remplace dans la suite la variable  $i$  précédemment utilisée pour indexer le modèle et les données. La variable associée à  $\mathbf{x}$  dans le plan de Fourier est la variable  $\mathbf{u}$ . Une image est donc modélisée par la somme des réponses

impulsionnelles monochromatiques  $m(\mathbf{x})$  :

$$m(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda} \psi_{\lambda} |\mathbf{a}_{\lambda}(\mathbf{x})|^2 \quad (6.31)$$

où  $\mathbf{a}_{\lambda}(\mathbf{x})$  est l'amplitude complexe normalisée dans le plan image et  $\psi_{\lambda}$  le flux, pour la longueur d'onde  $\lambda$ . Rappelons que le plan image et le plan pupille sont deux plans liés par la transformation de Fourier. On dispose de la relation suivante entre  $\mathbf{a}_{\lambda}(\mathbf{x})$  et l'amplitude complexe dans le plan pupille  $\hat{\mathbf{a}}_{\lambda}(\mathbf{u})$  :

$$\mathbf{a}_{\lambda}(\mathbf{x}) = \text{TF}(\hat{\mathbf{a}}_{\lambda}(\mathbf{u})) \quad (6.32)$$

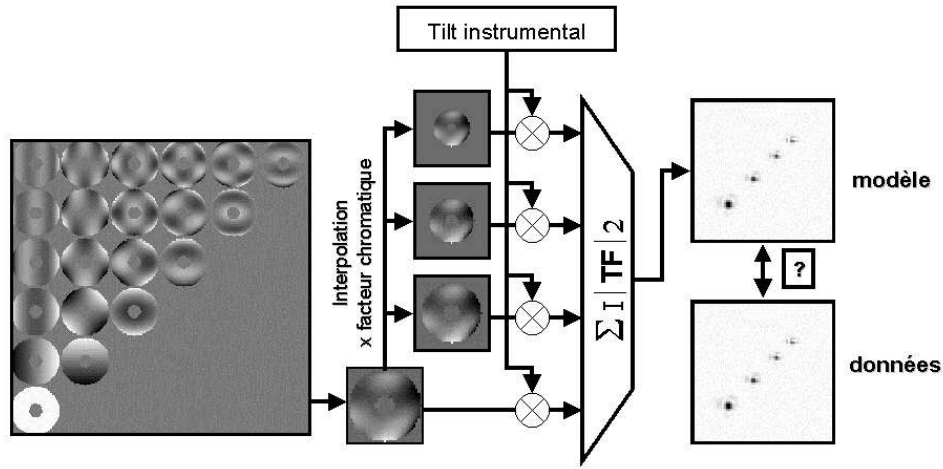


FIG. 6.2 – Principe du modèle des images MaTilD utilisé pour l'ajustement d'un carte de phase

L'amplitude complexe  $\hat{\mathbf{a}}_{\lambda}(\mathbf{u})$  dans le plan pupille est alors directement liée à la phase puisque :

$$\hat{\mathbf{a}}_{\lambda}(\mathbf{u}) = P_{\lambda}(\mathbf{u}) \exp[-i\phi_{\lambda}(\mathbf{u})] \quad (6.33)$$

où  $P_{\lambda}(\mathbf{u})$  est l'amplitude dans le plan pupille. Dans la suite, je me place dans le cas où la scintillation est négligeable, c'est à dire que  $P_{\lambda}(\mathbf{u})$  est uniforme sur toute la pupille.  $P_{\lambda}(\mathbf{u})$  est alors assimilé à la fonction pupille :

$$P_{\lambda}(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{u} \text{ est dans la pupille} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.34)$$

Comme on l'a vu précédemment, la phase peut s'écrire :

$$\varphi_\lambda(\mathbf{u}) = \frac{2\pi(n_\lambda - 1)}{\lambda} e(\lambda \mathbf{u}) \quad (6.35)$$

où  $e(\lambda \mathbf{u})$  est la différence d'épaisseur optique (quantité achromatique). Dans le cadre de la partie § 5.3, la différence d'épaisseur optique était générée pour simuler une turbulence suivant une loi de Kolmogorov. Ici on doit disposer d'un modèle modal de la phase, j'ai donc choisis d'écrire la phase sous la forme :  $\varphi_\lambda(\mathbf{u}) = \beta_\lambda \cdot q(\lambda \mathbf{u})$ . C'est la fonction  $q(\lambda \mathbf{u})$  que l'on décompose sur une base de fonction  $\{b_\lambda^k(\mathbf{u})\}$  :

$$q(\lambda \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} c^k b_\lambda^k(\mathbf{u}) \quad (6.36)$$

Ici, peut donc distinguer les paramètres primaires (c'est à dire ceux dont on recherche la valeur) et les paramètres secondaires (c'est à dire les paramètres nécessaires à l'optimisation mais dont on ne recherche pas la valeur). Les paramètres primaires sont amplitudes des modes tilts pour chaque longueur d'onde notés dans la suite  $c_\lambda^1$  et  $c_\lambda^2$ . Les paramètres secondaires sont : les intensités des images monochromatiques (les  $\psi_\lambda$ ) et l'amplitude des modes autres que le tilt (les  $c^k$ ).

Afin de ne pas introduire de contraintes sur les modes tilt, j'ai choisi de les estimer pour chaque longueur d'onde. Je n'introduit donc aucune contrainte *a priori* sur la loi de variation de l'indice de réfraction pour les tilt. Ceci n'a pas très contraignant car on dispose de quatre longueurs d'onde ce qui fait huit paramètres à optimiser. Par contre les modes autres que le tilt étant des paramètres secondaires, j'ai choisi d'utiliser un coefficient par mode et un coefficient chromatique :  $\beta_\lambda$ . Ceci permet de diminuer le nombre de paramètres et d'assurer une cohérence entre les formes des images monochromatiques.

On a alors le choix du coefficient chromatique  $\beta_\lambda$ . En effet la décomposition définie par l'ensemble  $\{\beta_\lambda / \alpha; \alpha c^k; \forall \lambda, \forall k\}$  est identique à celle définie par  $\{\beta_\lambda; c^k; \forall \lambda, \forall k\}$ . Je choisis donc de prendre  $\beta_{500nm} = 1$ . Pour toute autre longueur d'onde on a alors la relation :

$$\varphi_\lambda(\mathbf{u}) = \frac{n_\lambda - 1}{n_{\lambda_0}} \frac{\lambda_0}{\lambda} \varphi_{\lambda_0}(\mathbf{u}) = \frac{n_\lambda - 1}{n_{\lambda_0}} \frac{\lambda_0}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} c^k b_\lambda^k(\mathbf{u}) \quad (6.37)$$

La phase peut s'écrire donc de la façon suivante :

$$\boxed{\varphi_\lambda(\mathbf{u}) = c_\lambda^1 b_\lambda^1(\mathbf{u}) + c_\lambda^2 b_\lambda^2(\mathbf{u}) + \beta_\lambda \sum_{k=3}^{\infty} c^k b_\lambda^k(\mathbf{u})} \quad (6.38)$$

Je m'intéresse maintenant au choix de la base de fonctions. Comme on l'a vu au paragraphe chapitre 2.2, il est courant d'utiliser la base des polynômes de Zernike pour la description de la phase d'un système optique. Cette base est bien adaptée au problème de recherche de phase car elle est orthonormée sur une pupille circulaire, cette propriété simplifiant les calculs des coefficients de la décomposition modale (voir (6.40)).

Toutefois, cette base n'est plus orthonormée sur une pupille possédant une obstruction centrale, comme c'est le cas de l'instrument MaTilD. Il est donc judicieux de recourir à d'autres bases. On peut par exemple utiliser une décomposition Karhunen-Loève. R. Cannon[20] a montré qu'il était possible de générer numériquement cette base et de l'utiliser dans la reconstruction de surfaces d'onde à partir de données Shack-Hartmann[21]. Mais l'estimation numérique de cette base se fait grâce à un échantillonnage en coordonnées polaires avec un pas irrégulier suivant le rayon (en  $1/r^2$ ). Cette méthode n'est donc pas facilement adaptable à l'expérience MaTilD où les données sont celles fournies par le CCD avec un échantillonnage régulier en  $x, y$ . L'échantillonnage dans le plan pupille devra donc être cartésien avec un pas régulier pour simplifier les calculs.

Étant donné que seuls les modes tilts sont intéressants pour la mesure et que la connaissance des fonctions de manière analytique n'est pas requise, j'ai choisi de construire une base sur les polynômes en géométrie cartésienne. On peut remarquer sur la figure 6.3 l'effet de l'orthogonalisation de la base est bien visible sur les modes d'ordre 5 : le mode le plus à gauche est de la forme  $x^5$  mais celui qui est le plus à droite n'est pas de la forme  $y^5$  car il a été orthogonalisé par rapport aux autres modes. Une telle base possède l'avantage d'avoir les deux modes tilts (polynômes d'ordre 1) et d'être facilement calculée numériquement. Les fonctions de la base sont construites numériquement sur les puissances successives des coordonnées  $x$  et  $y$ . L'orthogonalité est assurée par soustraction à la fonction d'ordre  $n$ , de sa projection sur les ordres inférieurs calculés précédemment. La normalisation de la fonction assure la validité de :

$$\langle b_{\lambda, \mathbf{u}}^k \cdot b_{\lambda, \mathbf{u}}^l \rangle = \delta_{k, l} \quad (6.39)$$

$\delta_{k, l}$  étant le symbole de Kronecker ( $\delta_{k, l} = 1$  si  $k = l$  et  $\delta_{k, l} = 0 \forall k \neq l$ ). Comme la base est orthonormée, le coefficient de la décomposition d'une surface d'onde  $\varphi_{\lambda, \mathbf{u}}$  sur la fonction de la



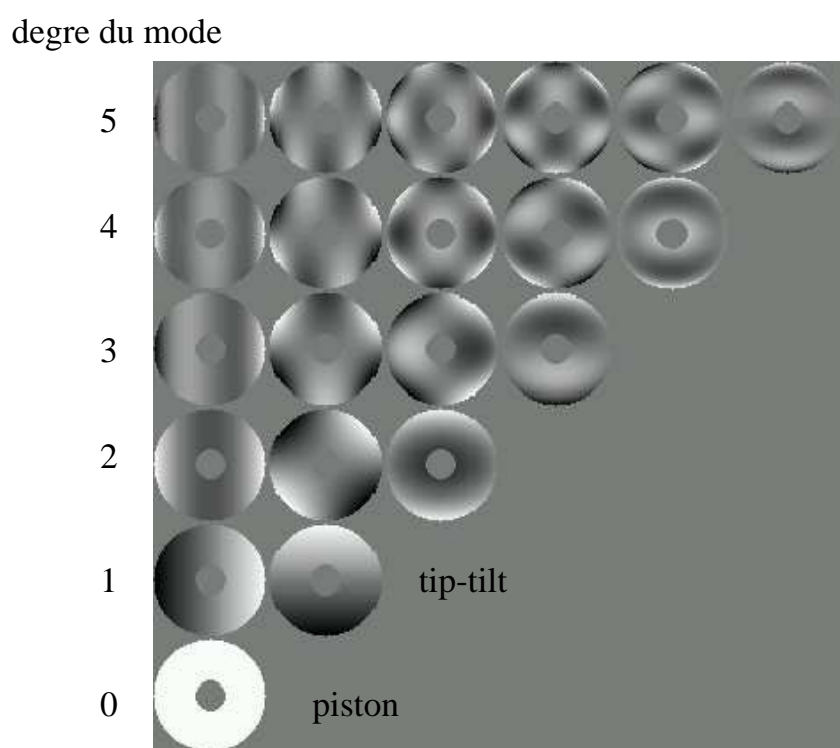


FIG. 6.3 – *Les 21 premiers modes de la base en coordonnées cartésiennes utilisée dans le cadre de l'expérience MaTilD.*

base  $b_\lambda^k(\mathbf{u})$  de rang  $k$  s'écrit :

$$c_\lambda^k = \sum_{\mathbf{u}} b_\lambda^k(\mathbf{u}) \cdot \varphi_{\lambda, \mathbf{u}} \quad (6.40)$$

Finalement on obtient l'expression du modèle utilisé dans le traitement :

$$m(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda} \psi_{\lambda} \left| \text{TF} \left\{ P_{\lambda}(\mathbf{u}) \exp \left[ -\mathbf{i} (c_{\lambda}^1 b_{\lambda}^2(\mathbf{u}) + c_{\lambda}^2 b_{\lambda}^1(\mathbf{u}) + \frac{n_{\lambda} - 1}{n_{\lambda_0} - 1} \left( \frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^2 \sum_{k=3}^{\infty} c^k b_{\lambda}^k(\mathbf{u})) \right] \right\} \right|^2 \quad (6.41)$$

La fonction de pénalisation qui est utilisée est un moindre carré pondéré par la variance des données. Comme l'a montré R. Lane[55], le choix d'une statistique gaussienne pour les erreurs donne de meilleurs résultats qu'une statistique poissonnienne dans le cas où les deux phénomènes sont présents. Je prends donc, comme statistique des erreurs sur la mesure de l'intensité dans le plan image, le bruit de lecture du CCD. La variance de celui-ci est noté  $\sigma_{lect}^2$ . La fonction de pénalisation est alors :

$$Q = \sum_{\mathbf{x}} w_{\mathbf{x}} (d_{\mathbf{x}} - m_{\mathbf{x}})^2 \quad (6.42)$$

Avec  $w_{\mathbf{x}} = 1/(2\sigma_{\mathbf{x}}^2)$  et  $\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sigma_{lect}^2$ ,  $\forall \mathbf{x}$ .

## 6.5.2 Algorithme

Comme on l'a vu au chapitre 6.4, l'algorithme de recherche du minimum dans le sous-espace de l'espace des paramètres requiert le calcul du modèle et de son gradient (voir équation (6.30)). Le calcul de ce dernier peut se faire par différence finie, dans le cas où son expression analytique n'est pas accessible. Mais cette méthode est longue. Pour chaque paramètre  $p_{\alpha}$ , on calcule le modèle au point  $\mathbf{p} + \delta p_{\alpha}$  : seul le paramètre considéré est modifié d'une quantité infinitésimale. On a donc autant d'estimation du modèle que de paramètres et ce à chaque nouveau pas dans l'espace de minimisation. De plus, si on veut rendre l'estimation du gradient par différence finie plus robuste, il faut faire varier le paramètre  $p_{\alpha}$  dans les deux directions :  $\pm \delta p_{\alpha}$ , ce qui entraîne deux fois plus de calculs. On a donc tout intérêt à dériver analytiquement le gradient à partir de l'expression du modèle. C'est ce que j'ai fait pour le traitement des images MaTilD à partir du modèle donné par (6.41).

Il est important de remarquer que ce modèle est linéaire par rapport aux intensités  $\psi_\lambda$  des images monochromatiques :  $m(\mathbf{x}) = \sum_\lambda \psi_\lambda |\mathbf{a}_\lambda(\mathbf{x})|^2$ . Trouver les intensités optimales pour la fonction de pénalisation  $Q$  de l'équation (6.42) revient donc, au premier ordre, à résoudre une équation linéaire :

$$\frac{\partial Q}{\partial \psi_\lambda} = 0 = - \sum_{\mathbf{x}} w_{\mathbf{x}} \left( d_{\mathbf{x}} - \sum_{\lambda'} \psi_{\lambda'} |\mathbf{a}_{\lambda'}(\mathbf{x})| \right) |\mathbf{a}_\lambda(\mathbf{x})| \quad (6.43)$$

$\psi_\lambda$  est donc la solution du système  $A \cdot \alpha = \mathbf{b}$  avec :

$$\begin{aligned} [A_{\lambda\lambda'}] &= \sum_{\mathbf{x}} w_{\mathbf{x}} |\mathbf{a}_\lambda(\mathbf{x})| |\mathbf{a}_{\lambda'}(\mathbf{x})| \\ b_{\lambda'} &= \sum_{\mathbf{x}} w_{\mathbf{x}} d_{\mathbf{x}} |\mathbf{a}_{\lambda'}(\mathbf{x})| \end{aligned} \quad (6.44)$$

Le modèle n'est linéaire par rapport aux intensités qu'au premier ordre car la matrice  $A$  et le vecteur  $\mathbf{b}$  dépendent du module de l'amplitude complexe dans le plan image  $|\mathbf{a}_\lambda(\mathbf{x})|$ . Ils sont donc des fonctions des autres paramètres du modèle (les  $c^k$ ). Pour la minimisation de la fonction de pénalisation  $Q$  donnée par l'équation (6.42), j'ai cependant choisi de considérer les intensités comme solutions de l'équation linéaire précédente. La démarche suivie pour minimiser la fonction  $Q$  consiste donc à dissocier les paramètres  $c^k$  des intensités  $\psi_\lambda$  :

1. Point de départ  $(\mathbf{p}_0, \psi_\lambda^0)$  où  $\mathbf{p}_0$  est le point du sous-espace des paramètres constitué des  $c^k$  et des  $c_\lambda^{1,2}$ . Les coefficients  $c^k$  sont initialisés à 0, les modes tip-tilt  $c_\lambda^1$  et  $c_\lambda^2$  sont initialisés grâce à l'angle d'arrivée obtenu par le traitement précédent (voir chapitre 5). Les intensités  $\psi_\lambda^0$  sont fixées par l'intensité sur la fenêtre de calcul du centre de gravité.
2. Les intensités sont ajustées en résolvant l'équation linéaire donnée par le système (6.44). On est au point  $(\mathbf{p}_0, (\psi')_\lambda^0)$
3. Au point  $(\mathbf{p}_0, (\psi')_\lambda^0)$ , la fonction  $Q$  est calculée ainsi que la matrice jacobienne du modèle  $\frac{\partial m_i}{\partial p_\alpha}$ , afin de déterminer le gradient et la matrice hessienne de la fonction  $Q$ .
4. Le minimum de  $Q$ , suivant la direction du gradient au point  $(\mathbf{p}_0, (\psi')_\lambda^0)$ , est obtenu par l'équation (6.19). C'est le point  $(\mathbf{p}_1, (\psi')_\lambda^0)$ .
5. Les intensités sont ajustées comme à l'étape 2. On est alors au point  $(\mathbf{p}_1, \psi_\lambda^1)$ . Les étapes suivantes étant itératives, j'appelle le point courant  $(\mathbf{p}_n, \psi_\lambda^n)$

6. La fonction  $Q$ , son gradient et l'approximation de la matrice hessienne sont calculés. La recherche se fait dans le sous-plan de l'espace des  $c^k$ . c'est le plan défini par :  $\nabla_{\mathbf{p}_n} Q$  et  $\delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}$ . Je ne prends ici que le pas précédent et le gradient comme directions du sous-espace de minimisation. Le pas à effectuer dans ce sous-espace pour atteindre le minimum de la fonction  $Q$  (toujours dans ce sous-espace) est la solution de l'équation (6.29). On est alors au point  $(\mathbf{p}_{n+1}, \psi_\lambda^n)$ .
7. Les intensités sont ajustées : on est au point  $(\mathbf{p}_{n+1}, \psi_\lambda^{n+1})$ . On effectue alors une nouvelle minimisation comme à l'étape 6.

Pour tout algorithme itératif, il faut disposer d'un critère d'arrêt. Dans le cas des images MaTilD, je m'arrête lorsque la convergence est inférieure à un seuil. La convergence est définie comme l'écart  $Q(\mathbf{p}_n) - Q(\mathbf{p}_{n-1})$ . Le seuil choisi est lié à la précision de calcul de la fonction  $Q$ , le critère couramment utilisé est de prendre ce seuil égal à la racine carrée de la précision machine[51]. Afin de déterminer si l'ajustement est « correct », je compare la valeur finale de  $Q$  et le nombre de degrés de liberté (*i.e.*, le nombre de points dans l'image moins le nombre de paramètres). En effet si l'ajustement est correct, la fonction  $Q$  est une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité du  $\chi^2$ . L'espérance mathématique d'une telle variable est le nombre de degrés de liberté  $\nu = M - N$ , son écart type est  $\sqrt{2\nu}$ .

### 6.5.3 Gradient et matrice jacobienne

### 6.5.4 Gradient

Je calcule dans un premier temps la dérivée de  $Q$  par rapport aux modes tip-tilt :  $\frac{\partial Q}{\partial c_\lambda^{1,2}}$ . Je considère ensuite le cas des modes élevés (supérieurs au tilt) qui sont alors indépendants de  $\lambda$  :

$$\frac{\partial Q}{\partial c_\lambda^{1,2}} = -2 \sum_{\mathbf{x}} w_{\mathbf{x}} \underbrace{[d_{\mathbf{x}} - m_{\mathbf{x}}]}_{r_{\mathbf{x}}} \frac{\partial m_{\mathbf{x}}}{\partial c_\lambda^{1,2}} \quad (6.45)$$

Dans la suite je désignerai par « résidus » le terme  $r_{\mathbf{x}}$  et « résidus pondérés » le terme  $r_{\mathbf{x}}^w = w_{\mathbf{x}} r_{\mathbf{x}}$ . Ces deux quantités sont réelles. En remarquant que la dérivée du module carré  $|z|^2$  d'une

quantité complexe par rapport au paramètre  $\gamma$  s'écrit :

$$\frac{\partial |z|^2}{\partial \gamma} = \frac{\partial z}{\partial \gamma}^* + \frac{\partial z^*}{\partial \gamma} z = 2\text{Re} \left[ \frac{\partial z}{\partial \gamma} z^* \right] \quad (6.46)$$

et en tenant compte de l'équation (6.31), la dérivé du modèle  $\frac{\partial m_{\mathbf{x}}}{\partial c_{\lambda}^{1,2}}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{\mathbf{x}}}{\partial c_{\lambda}^{1,2}} &= 2\psi_{\lambda} \text{Re} \left[ \frac{\partial \mathbf{a}_{\lambda, \mathbf{x}}}{\partial c_{\lambda}^{1,2}} \mathbf{a}_{\lambda, \mathbf{x}}^* \right] \\ &= 2\psi_{\lambda} \text{Re} \left[ \mathbf{a}_{\lambda, \mathbf{x}}^* \sum_{\mathbf{u}} F_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} \frac{\partial \hat{\mathbf{a}}_{\lambda, \mathbf{u}}}{\partial c_{\lambda}^{1,2}} \right] \\ &= 2\psi_{\lambda} \text{Re} \left[ \mathbf{a}_{\lambda, \mathbf{x}}^* \sum_{\mathbf{u}} F_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} - \mathbf{i} b_{\lambda, \mathbf{u}}^{1,2} \hat{\mathbf{a}}_{\lambda, \mathbf{u}} \right] \\ &= -2\psi_{\lambda} \text{Im} \left[ \mathbf{a}_{\lambda, \mathbf{x}}^* \sum_{\mathbf{u}} F_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} \hat{\mathbf{a}}_{\lambda, \mathbf{u}} b_{\lambda, \mathbf{u}}^{1,2} \right] \end{aligned} \quad (6.47)$$

où  $F_{\mathbf{x}, \mathbf{u}}$  est la matrice de la transformée de Fourier :

$$F_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} = e^{+2i\pi \mathbf{x} \mathbf{u} / M} \quad (6.48)$$

La matrice de la transformée de Fourier inverse est  $1/MF_{\mathbf{x}, \mathbf{u}}^H = 1/MF_{\mathbf{u}, \mathbf{x}}^*$ .

En reportant l'expression ainsi obtenue dans le gradient de la fonction de pénalisation, on obtient :

$$\frac{\partial Q}{\partial c_{\lambda}^{1,2}} = 4\psi_{\lambda} \text{Im} \left[ \sum_{\mathbf{x}} r_{\mathbf{x}}^w \mathbf{a}_{\lambda, \mathbf{x}}^* \sum_{\mathbf{u}} F_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} \hat{\mathbf{a}}_{\lambda, \mathbf{u}} b_{\lambda, \mathbf{u}}^{1,2} \right] \quad (6.49)$$

Cette expression est coûteuse en temps de calcul, puisqu'elle nécessite  $N_{\text{modes}} \times N_{\lambda}$  transformées de Fourier. L'inversion des sommations permet de diminuer significativement le nombre de transformées de Fourier à  $N_{\lambda}$ . Le gradient est alors réécrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial c_{\lambda}^{1,2}} = 4\psi_{\lambda} \sum_{\mathbf{u}} b_{\lambda, \mathbf{u}}^{1,2} \text{Im} \left[ \hat{\mathbf{a}}_{\lambda, \mathbf{u}} \sum_{\mathbf{x}} F_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} r_{\mathbf{x}}^w \mathbf{a}_{\lambda, \mathbf{x}}^* \right] \quad (6.50)$$

Je considère, à présent, le cas des modes élevés ( $k > 3$ ) pour lesquels les coefficients sont achromatiques. Pour les  $c^k$ , le gradient du modèle  $\frac{\partial m_{\mathbf{x}}}{\partial c^k}$  est donné par :

$$\frac{\partial m_{\mathbf{x}}}{\partial c^k} = -2 \sum_{\lambda} \psi_{\lambda} \beta_{\lambda} \text{Im} \left[ \mathbf{a}_{\lambda, \mathbf{x}}^* \sum_{\mathbf{u}} F_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} \hat{\mathbf{a}}_{\lambda, \mathbf{u}} b_{\lambda, \mathbf{u}}^k \right] \quad (6.51)$$

Le gradient de la fonction de pénalisation est alors :

$$\frac{\partial Q}{\partial c^k} = 4 \sum_{\lambda} \psi_{\lambda} \beta_{\lambda} \sum_{\mathbf{u}} b_{\lambda, \mathbf{u}}^k \operatorname{Im} \left[ \hat{a}_{\lambda, \mathbf{u}} \sum_{\mathbf{x}} F_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} r_{\mathbf{x}}^w a_{\lambda, \mathbf{x}}^* \right] \quad (6.52)$$

Dans la suite et dans le programme de minimisation, les coefficients de la projection de la phase sur la base des  $b_{\lambda}^k$  sont rangés dans un vecteur :

$$[c_{\alpha}] = [c_{\lambda_1}^1, c_{\lambda_1}^2, c_{\lambda_2}^1, c_{\lambda_2}^2, \dots, c^3, c^4, \dots, c^N]$$

### 6.5.5 Matrice jacobienne

La matrice jacobienne utilisée dans l'algorithme de minimisation est donnée par l'équation (6.30). Ce qui donne dans le cas présent :

$$J_{\mathbf{x}\theta} = \sum_{\alpha} \frac{\partial m_{\mathbf{x}}}{\partial c_{\alpha}} [\delta \mathbf{c}^{\theta}]_{\alpha} \quad (6.53)$$

$\delta \mathbf{c}^{\theta}$  étant la direction  $\theta$  qui détermine le sous-espace de minimisation. Il s'agit donc soit du gradient, soit du pas précédent. Dans le cas du gradient, la matrice jacobienne va donc s'écrire :

$$J_{\mathbf{x}\theta} = -2 \cdot \operatorname{Im} \left[ \sum_{\lambda} a_{\lambda, \mathbf{x}}^* \psi_{\lambda} \beta_{\lambda} \sum_{\mathbf{u}} F_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} \hat{a}_{\lambda, \mathbf{u}} \sum_k b_{\alpha, \mathbf{u}}^k (\nabla Q) \right]_{i\theta} \quad (6.54)$$

Dans le cas où la direction est un pas précédent  $\delta \mathbf{c} = [c_{\alpha}^{(n)}] - [c_{\alpha}^{(n-1)}]$ , la matrice jacobienne s'écrit :

$$J_{\mathbf{x}\theta} = -2 \cdot \operatorname{Im} \left[ \sum_{\lambda} a_{\lambda, \mathbf{x}}^* \psi_{\lambda} \beta_{\lambda} \sum_{\mathbf{u}} F_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} \hat{a}_{\lambda, \mathbf{u}} \sum_{\alpha} b_{\alpha, \mathbf{u}}^k \delta c_{\alpha} \right]_{i\theta} \quad (6.55)$$

Le pas optimal dans le sous-espace est alors la solution de l'équation linéaire (6.29).

### 6.5.6 Résultats

J'ai testé cet algorithme sur des images simulées, générées à partir d'une carte de phase suivant la statistique de Kolmogorov. Le tip-tilt est mesuré directement par projection sur la base  $b_{\lambda}^k(\mathbf{u})$ . À ce tilt aléatoire, j'ajoute un tilt connu et fixe afin de séparer les images monochromatiques. Celles-ci sont ensuite calculées et sommées pixel à pixel. L'algorithme montre alors une

flux (photons)	$10^4$	$10^5$	$10^6$
nombre de simulations	100	100	500
Erreur RMS sur le tilt différentiel (pixels)			
centroïde	0.311	0.0397	0.0103
$N_{\text{base}} = 3$	0.033	0.0062	0.0055
$N_{\text{base}} = 4$	0.032	0.0061	0.0053
$N_{\text{base}} = 5$	0.034	0.0057	0.0049
$N_{\text{base}} = 6$	0.037	0.0054	0.0047
$N_{\text{base}} = 7$	0.042	0.0056	0.0047
$N_{\text{base}} = 8$	0.046	0.0047	0.0044
$N_{\text{base}} = 9$	0.050	0.0052	0.0044

TAB. 6.1 – *Précisions de mesure du tilt différentiel par deux méthodes : le centre de gravité (première ligne dénommée centroïde) et l'ajustement de carte de phase (lignes suivantes données pour les différents degrés maximum des fonction polynômiales de la base de décomposition). L'écart type du bruit de lecture est de 2 électrons. Tableau extrait de l'article[56] paru dans le proceedings SPIE, voir annexe 8.1*

bonne capacité à retrouver les tilts lorsque les images sont de petite taille  $64 \times 64$ , ces résultats complètent ceux qui ont été présentés au colloque SPIE 2000 à Munich (voir chapitre 8.1). On obtient en effet une diminution de près d'un facteur 10, à « faible flux » (*i.e.*, pour un flux de  $10^4$  photons par image monochromatique), entre l'erreur RMS sur la mesure de l'angle d'arrivée par le centre de gravité et la mesure du tilt par l'ajustement de la carte de phase. À fort flux, l'estimation du centre de gravité est meilleure, le gain est moins important. Toutefois il reste de l'ordre d'un facteur 8 pour  $10^5$  photons par image et 2,3 pour  $10^6$  photons (voir tableau 6.1).

Par contre, lorsque la taille des images augmente (c'est à dire le champ simulé puisque l'échantillonnage restant inchangé), l'algorithme n'est plus robuste. Les précisions obtenues sont dégradées d'un facteur 3, lorsque l'on passe d'images de taille  $64 \times 64$  pixels à des images de taille  $128 \times 128$  pixels (voir tableau 6.2). J'ai effectué quelques simulations avec des images de la taille des données MaTilD ( $512 \times 512$  pixels), mais la précision alors obtenue est moins bonne que le centre de gravité : le tilt est connu à moins que le demi pixel près.

Une hypothèse sur l'origine de ce comportement est le positionnement du modèle sur le spe-

taille du champ	flux (photons)		
	$10^4$	$10^5$	$10^6$
$64 \times 64$	0,010	0,008	0,007
$128 \times 128$	0,052	0,039	0,021

TAB. 6.2 – *Précisions de mesure du tilt, en pixels, à 500nm, obtenues avec l’algorithme d’optimisation dans un sous-espace de l’espace des paramètres pour des images de petite tailles ( $64 \times 64$ ) et de taille moyenne ( $128 \times 128$ ). Le nombre de polynôme utilisé dans la base est de 20 et le nombre de simulations est 250. Les autres conditions sont identiques aux simulations précédentes.*

ckle le plus brillant. Ceci crée un minimum local suffisamment profond pour que l’algorithme de minimisation y reste bloqué. On observe alors un nombre grandissant de points aberrants dans les résultats.

J’ai alors limité le champ des images en ne prenant en compte que les points dont le signal était au dessus de dix fois l’écart type du bruit additif (2 électrons). Les autres points ayant alors un poids  $w_x = 0$ . Le comportement de l’algorithme de minimisation est resté identique. Une autre solution consisterait à limiter le champ, non pas en fonction du niveau du signal, mais en fonction de la distance au centre de gravité. Je n’ai toutefois pas eu le temps de tester cette méthode.

Pour tenter de limiter l’effet de blocage sur le speckle le plus brillant, présent même sur les images de petite taille, j’ai ajouté à l’algorithme de minimisation précédemment utilisé un lissage des images (modèle et données). Ce lissage diminuant au cours des itérations, l’information à « haute » fréquence spatiale (*i.e.*, les speckles) est lissée lors des premières itérations. Je m’attends alors à ce que la fonction de pénalisation soit plus lisse lors de ces itérations. Les minima locaux sont donc moins profonds et le risque de blocage est réduit.

### 6.5.7 Lissage

La fonction de pénalisation n’est pas absolument convexe dans le cas du traitement des images MaTilD. Ainsi la minimisation de la fonction de pénalisation peut aboutir à un minimum local. Ceci dépend du chemin suivi pour minimiser et donc notamment du jeu initial de



paramètres. Afin de rendre le choix des paramètres initiaux moins critique, j'ai développé un algorithme où le modèle et les données sont lissés (par la même fonction de lissage  $s_{\mu,\mathbf{x}}$ ). La largeur de la fonction de lissage est ensuite diminuée au fur et à mesure que la fonction de pénalisation est minimisée. Dans un premier temps, seuls les premiers modes sont ajustés, les modes élevés sont laissés libres (il n'y a pas d'information pour leur échelle spatiale). Puis au cours de la minimisation, les structures fines apparaissent (speckles) et contraignent les ordres élevés.

Ce lissage modifie la fonction de pénalisation  $Q$ . Je note  $Q^{(\mu)}$  la fonction lissée avec comme paramètre  $\mu$ , la largeur de la fonction de lissage. Cette fonction de pénalisation lissée  $Q^{(\mu)}$  s'écrit alors :

$$Q^{(\mu)} = \sum_{\mathbf{x}} w_{\mathbf{x}} [s_{\mu,\mathbf{x}} \star [d_{\mathbf{x}} - m_{\mathbf{x}}]]^2 = \sum_{\mathbf{x}} w_{\mathbf{x}} \underbrace{\left[ \sum_{\mathbf{y}} S_{\mu,\mathbf{x},\mathbf{y}} [d_{\mathbf{y}} - m_{\mathbf{y}}] \right]^2}_{r_{\mathbf{x}}^{(\mu)}} \quad (6.56)$$

$r_{\mathbf{x}}^{(\mu)}$  désigne les résidus lissés et  $S_{\mu,\mathbf{x},\mathbf{y}}$  désigne l'opérateur de convolution par la fonction de lissage  $s_{\mu,\mathbf{x}}$  de largeur caractéristique  $\mu$  :

$$f_{\mathbf{x}}^{(\mu)} = \sum_{\mathbf{y}} S_{\mu,\mathbf{x},\mathbf{y}} f_{\mathbf{y}} = \frac{1}{M^2} \sum_{\mathbf{u}} F_{\mathbf{x},\mathbf{u}}^* \hat{s}_{\mu,\mathbf{u}} \sum_{\mathbf{y}} F_{\mathbf{y},\mathbf{u}} f_{\mathbf{y}} \quad (6.57)$$

Aucune hypothèse sur la fonction de lissage n'est faite dans la suite, mais dans la pratique, j'ai choisi de prendre une gaussienne.

$$s_{\mu,\mathbf{x}} = \frac{1}{4\pi\mu} e^{-(\mathbf{x}^2/2\mu^2)} \quad (6.58)$$

Il faut, bien sûr, propager ce lissage dans le calcul du gradient et de la matrice jacobienne :

## Gradient

Pour le gradient, l'effet du lissage est le suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q^{(l)}}{\partial c_{\lambda}^k} &= -2 \sum_{\mathbf{x}} w_{\mathbf{x}} r_{\mathbf{x}}^{(\mu)} \frac{\partial m_{\mathbf{x}}}{\partial c_{\lambda}^k} \star s_{\mu,\mathbf{x}} \\ &= 4\psi_{\lambda} \beta_{\lambda} \sum_{\mathbf{x}} q_{\mathbf{x}}^{(\mu)} \text{Im} \left[ a_{\lambda,\mathbf{x}}^* \sum_{\mathbf{v}} F_{\mathbf{x},\mathbf{v}} \hat{a}_{\lambda,\mathbf{v}} b_{\lambda,\mathbf{v}}^k \right] \end{aligned} \quad (6.59)$$

où  $q_{\mathbf{x}}^{(\mu)}$  désigne le lissage des résidus lissés  $r_{\mathbf{x}}^{(\mu)}$  par  $s_{\mu, -\mathbf{x}}$ . Ceci implique deux transformées de Fourier supplémentaires dans le calcul du gradient.

$$q_{\mathbf{x}}^{(\mu)} = \sum_{\mathbf{y}} S_{\mu, \mathbf{y}, \mathbf{x}} w_{\mathbf{y}} r_{\mathbf{y}}^{(\mu)} = \left[ \sum_{\mathbf{y}} S_{\mu, \mathbf{x}, \mathbf{y}} w_{\mathbf{y}} r_{\mathbf{y}}^{(\mu)} \right]^* \quad (6.60)$$

Ce gradient peut se réécrire de la façon suivante, afin de limiter le nombre de transformées de Fourier nécessaires :

$$\frac{\partial Q^{(l)}}{\partial c_{\lambda}^k} = 4\psi_{\lambda} \beta_{\lambda} \sum_{\mathbf{u}} b_{\lambda, \mathbf{u}}^k \operatorname{Im} \left[ \hat{a}_{\lambda, \mathbf{u}} \sum_{\mathbf{x}} F_{\mathbf{x}, \mathbf{v}} q_{\mathbf{x}}^{(\mu)} a_{\lambda, \mathbf{x}}^* \right] \quad (6.61)$$

Dans le cas non lissé ( $\mu = 0$ ), on a  $q_{\mathbf{x}}^{(\mu)} = r_{\mathbf{x}}^w$ . On retrouve alors l'équation du gradient (6.50).

### Matrice jacobienne

De même, le lissage modifie la matrice jacobienne obtenue par les équations (6.54) et (6.55) :

$$J_{\mathbf{x}\theta} = -2 \sum_{\mathbf{y}} S_{\mu, \mathbf{x}, \mathbf{y}} \operatorname{Im} \left[ \sum_{\lambda} a_{\lambda, \mathbf{y}}^* \psi_{\lambda} \beta_{\lambda} \sum_{\mathbf{u}} F_{\mathbf{y}, \mathbf{u}} \hat{a}_{\lambda, \mathbf{u}} \sum_{\alpha} b_{\alpha, \mathbf{u}}^k \delta c_{\alpha} \right]_{i\theta} \quad (6.62)$$

	flux (photons)		
taille des images	$10^4$	$10^5$	$10^6$
$64 \times 64$	0,007	0,007	0,007
$128 \times 128$	0,036	0,042	0,040

TAB. 6.3 – *Précisions de mesure du tilt, en pixels, à 500nm, obtenues avec l'algorithme d'optimisation dans un sous-espace de l'espace des paramètres avec le lissage des données et du modèle. Le nombre de polynômes utilisés dans la base est de 20 et le nombre de simulations est 250. Les autres conditions sont identiques aux simulations précédentes.*

### Résultats

Les modifications du programme de minimisation sont donc minimales par rapport à la version non lissée. J'ai pu mettre en place cet algorithme et effectuer quelques tests. La sensibilité aux paramètres initiaux est alors réduite, mais le nombre de points aberrants reste important

(d'environ 30% du nombre de simulations). Il est même étonnant de remarquer que la précision n'est pas améliorée que ce soit pour les images de petites taille ( $64 \times 64$  pixels) ou de tailles moyennes ( $128 \times 128$  pixels), voir tableau 6.3. En effet le lissage disparaissant après 50 itérations, on se trouve alors dans les mêmes conditions que précédemment (*i.e.*, sans lissage, voir chapitre 6.5.6). On s'attend donc à obtenir une précision au moins égale à celle du cas sans lissage. C'est le cas pour les images à faible flux et à flux moyen, mais pas à fort flux (0,021 pixels sans lissage contre 0,040 pixels avec lissage). Je n'ai toutefois pas eu le temps d'étudier plus précisément l'origine de cette perte de résolution.

### 6.5.8 Conclusions

L'étude que j'ai effectuée sur la mesure du tilt à différentes longueurs d'onde sur une image du type MaTilD, montre que pour des images de petites taille (*i.e.*, des champs petits), la précision est très nettement améliorée par rapport à l'estimation des centres de gravité (un facteur 10). Par contre, je n'ai pas eu le temps matériel de mettre en pratique ce traitement sur les données MaTilD puisque la précision de mesure se dégrade fortement avec la taille (*i.e.*, le champ) des images. Ceci est vraisemblablement dû à une régularisation insuffisante : dans le cas présent on a une régularisation par troncature (nombre fini de modes). Il faudrait introduire une régularisation qui prenne en compte l'amplitude des modes dans la turbulence atmosphérique. En effet, sans cette régularisation appropriée, les modes d'ordres élevés (qui correspondent sur l'image à des détails fin) s'ajuste sur le bruit contenu dans l'image et non sur l'information qu'elle contient. Toutefois, la recherche des causes précises de ce dysfonctionnement est long étant donné le temps de calcul. Sur des images  $64 \times 64$ , la minimisation dure environ 3 minutes sur un PC Celeron 600MHz. Le temps de calcul est dominé par les calculs de FFT utilisés dans l'estimation du modèle, de son gradient et de la matrice jacobienne. De plus, lorsque la taille des images augmente, la taille des tableaux à traiter dépasse la taille de la mémoire vive, de nombreux accès au disque sont alors nécessaires. Pour des images de la taille des données MaTilD ( $512 \times 512$ ), le temps de calcul est d'environ 30 heures<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>L'augmentation de la taille des tableaux à traiter de  $64 \times 64$  à  $512 \times 512$  augmente le temps de calcul des FFT d'un facteur 384 (algorithme en  $N \log_2(N)$ )

Cette méthode semble toutefois prometteuse pour le traitement en temps différé d'images. Un tel algorithme peut s'appliquer de manière plus générale à la recherche d'une carte de phase, lorsque plusieurs images à des longueurs d'onde différentes sont présentes dans l'image. Quelques tests ont permis de montrer que, sur des images  $64 \times 64$ , même dans le cas d'images très peu séparées (fort chevauchement), l'estimation du tilt est très bonne, à mieux que le centième de pixel près.



# Chapitre 7

## Conclusions

Je me suis intéressé, au cours de ma thèse et dans le cadre du projet ÉLPOA<sup>1</sup>, à la mesure du tilt différentiel. Cette mesure est l'une des bases de l'étoile laser polychromatique, méthode qui permet de mesurer le tilt atmosphérique que les méthodes classiques d'étoile laser ne permettent pas de détecter. Cette mesure n'avait jamais été effectuée auparavant. J'ai donc développé, testé et utilisé un instrument dédié à cette mesure : l'instrument MaTilD.

La mesure s'est révélée difficile de par la faiblesse du signal : quelques millisecondes d'arc d'écart type (pour le tilt différentiel) sur des images tavelées. De plus, des problèmes de matériel (miroir primaire de mauvaise qualité, alimentation de la caméra défectueuse) ont ralenti la progression de mon travail d'analyse. Toutefois j'ai développé deux traitements de données : la mesure de l'angle d'arrivée par le calcul du centre de gravité et la mesure du tilt par l'ajustement d'une carte de phase sur les images. L'étude et les simulations effectuées ont montré que la mesure du tilt différentiel par ces deux traitements est possible. Le rapport signal sur bruit attendu pour le centre de gravité est de l'ordre de 5. Il devrait être amélioré par l'utilisation de l'ajustement de la carte de phase.

La mesure de centre de gravité a permis de montrer pour la première fois la variation chromatique du tilt atmosphérique. Toutefois, la précision obtenue n'est pas celle attendue, le rapport signal sur bruit est en effet de l'ordre de l'unité. Plusieurs hypothèses peuvent être avancées pour expliquer cette perte de précision :

---

<sup>1</sup>Étoile Laser Polychromatique pour l'Optique Adaptative

- L'instrument MaTilD, malgré sa simplicité, introduit peut-être un tilt chromatique fonction du tilt de la surface d'onde incidente. Toutefois l'instrument a été conçu pour limiter au maximum les effets chromatiques (utilisation de miroirs, dispersion des longueurs d'onde en faisceaux collimatés).
- Le capteur utilisé introduit peut-être une non-linéarité sur la mesure de l'intensité lumineuse. En effet, les capteurs d'images CCD présentent généralement une non-linéarité à faible signal. Cette non-linéarité n'a pas été détectée, que ce soit dans le cadre de l'expérience MaTilD ou dans le cas des mesures PASS II. La courbe de linéarité n'étant pas fournie par le constructeur, une calibration devrait permettre de lever l'ambiguïté.
- La non-uniformité de la réponse à l'intérieur du pixel joue peut-être un rôle dans la mesure du centre de gravité. Une simple pente sur la sensibilité intra-pixel ne devrait pas perturber les résultats (ceci équivaut à un déplacement de l'origine pour tous les pixels). Un autre effet pouvant venir perturber les mesures est la diaphonie ou « *crosstalk* ». Ceci correspond au fait que la sensibilité du pixel n'est pas limitée à la taille géométrique de celui-ci. Ainsi un pixel capte une partie des photons normalement attribués à son voisin. Ceci dégrade la résolution du capteur et ce phénomène est très dépendant de la longueur d'onde. En effet il vient de la diffusion des électrons dans le silicium. De plus, ce phénomène est généralement important pour les CCD amincis illuminés par leur face arrière, comme c'est le cas pour la caméra Hamamatsu que j'ai utilisée.

L'origine de cette dégradation ne semble toutefois pas venir de l'algorithme de mesure du centre de gravité en lui même. En effet, d'autres estimations sont actuellement en cours. Elles sont basées sur ajustement de gaussiennes sur les images. L'estimation de la précision de mesure est alors possible. Pour cela, l'ajustement est réalisé sur une sous-ensemble de pixels (choisit aléatoirement dans l'image). Cet ajustement est alors réalisé sur un grand nombre de sous-ensemble et pour chaque image. La dispersion des résultats ainsi obtenus est une estimation de l'erreur propre à la mesure. La précision obtenue est alors similaire à celle obtenue par les centre de gravité.

En ce qui concerne l'ajustement de carte, l'algorithme a été testé avec succès sur des images à champ faible. Mais, lors que le champ augmente, l'algorithme n'est plus efficace. Il n'est

donc pas adaptable, dans son état actuel aux données MaTilD. Une étude plus approfondie du comportement de l'algorithme devra être effectuée. Ceci permettrait de détecter l'origine des instabilités de l'algorithme empêchant pas de mesurer le tilt différentiel avec une bonne précision sur les mesures (où plus généralement sur les images de grandes tailles). Je n'ai malheureusement pas eu le temps matériel de développer ces différentes hypothèses.

La poursuite des études est donc nécessaire afin de conclure quant au flux nécessaire (et donc la puissance du laser requise) dans le cadre du projet ÉLP-OA. Toutefois, la démonstration de l'existence du tilt différentiel a été effectuée par l'expérience MaTilD qui a, pour la première fois, permis de mesurer la différence de tilt entre plusieurs longueurs d'onde. Il reste à identifier l'origine des erreurs de mesures et implémenter un traitement en temps réel pour la mesure du tilt dans un système d'étoile laser polychromatique pour l'optique adaptative.





# Bibliographie

- [1] A. Labeyrie. Attainment of diffraction-limited resolution in large telescope by fourier analysing speckle patterns in star images. *Astronomy and Astrophysics*, 6 :85–87, 1970.
- [2] M. Tallon, A. Baranne, A. Blazit, F. Foy, R. Foy, I. Tallon-Bosc, and E. Thiebaut. Spid : a high spectral resolution diffraction-limited camera. *SPIE Proceedings*, 4007 :962–970, July 2000.
- [3] H.W. Babcock. The possibility of compensating astronomical seeing. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 65 :229+, October 1953.
- [4] Miska Le Louarn, Norbert N. Hubin, Renaud Foy, and Michel Tallon. Sky coverage and psf shape with lgs ao on 8-m telescopes. *SPIE Proceeding*, 3353 :364–370, September 1998.
- [5] Renaud Foy and Antoine Labeyrie. Feasibility of adaptive telescope with laser probe. *Astronomy and Astrophysics*, 152 :29–31, November 1985.
- [6] R. Foy, A. Migus, F. Biraben, G. Grynberg, P.R. McCullough, and M. Tallon. The polychromatic artificial sodium star : A new concept for correcting the atmospheric tilt. *Astronomy and Astrophysics, Supplement Series*, 111 :569–578, June 1995.
- [7] M. Lesieur. *La turbulence*. Presses universitaires de Grenoble, 1994. ISBN 2-7061-0588-7.
- [8] F. Roddier. The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy. In *Progress in optics XIX*, volume 19, pages 281–376, 1981.
- [9] F. Martin, R. Conan, A. Tokovinin, A. Ziad, H. Trinquet, J. Borgnino, A. Agabi, and M. Sarazin. Optical parameters relevant for high angular resolution at paranal from gsm

- instrument and surface layer contribution. *Astronomy and Astrophysics, Supplement Series*, 144 :39–44, May 2000.
- [10] F. Martin, A. Tokovinin, A. Ziad, R. Conan, J. Borgnino, R. Avila, A. Agabi, and M. Sarazin. First statistical data on wavefront outer scale at la silla observatory from the gsm instrument. *Astronomy and Astrophysics*, 336 :L49–L52, August 1998.
- [11] A.A. Tokovinin, A. Ziad, F. Martin, R. Avila, J. Borgnino, R. Conan, and M.S. Sarazin. Wavefront outer-scale monitoring at la silla. *Proceedings SPIE*, 3353 :1155–1162, September 1998.
- [12] D. Dravins, L. Lindegren, E. Mezey, and A.T. Young. Atmospheric intensity scintillation of stars, i. statistical distributions and temporal properties. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 109 :173–207, February 1997.
- [13] D. Dravins, L. Lindegren, E. Mezey, and A.T. Young. Atmospheric intensity scintillation of stars. ii. dependence on optical wavelength. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 109 :725–737, June 1997.
- [14] D. Dravins, L. Lindegren, E. Mezey, and A.T. Young. Atmospheric intensity scintillation of stars. iii. effects for different telescope apertures. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 110 :610–633, May 1998.
- [15] David L. Fried. Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures. *Journal of the Optical Society of America*, 56(10) :1372–1379, october 1996.
- [16] R.J. Noll. Zernicke polynomials and atmospheric turbulence. *Journal of the Optical Society of America*, 66(3) :207–211, March 1976.
- [17] J.Y. Wang and J.K. Markey. Modal compensation of atmospheric turbulence phase distortion. *Journal of the Optical Society of America*, 68(1) :78–87, January 1978.
- [18] Jean-Marc Conan. *Étude de la correction partielle en optique adaptative*. PhD thesis, Office National d’études et de recherches aérospatiales, 1995.
- [19] E. Gendron and P. Lena. Astronomical adaptive optics. 1 : Modal control optimization. *Astronomy and Astrophysics*, 291 :337–347, November 1994.

- [20] R.C. Cannon. Optimal bases for wave-front simulation and reconstruction on annular apertures. *Journal of the Optical Society of America*, 13 :862–867, April 1996.
- [21] R.C. Cannon. Global wave-front reconstruction using shack-hartmann sensors. *Journal of the Optical Society of America A*, 12 :2031+, 1995.
- [22] V. I. Tatarskii. *The effects of the turbulent atmosphere on wave propagation*. Jerusalem : Israel Program for Scientific Translations, 1971, 1971.
- [23] R.G. Lane, A. Glindemann, and J.C. Dainty. Simulation of a kolmogorov phasescreen. *Waves in Random Media*, pages 209–224, 1992.
- [24] Richard J. Sasiela. *Electromagnetic Wave Propagation in Turbulence*. Springer-Verlag, 1994.
- [25] A. Sivaramakrishnan, R.J. Weymann, and J.W. Beletic. Measurement of the correlation of stellar centroid motion. *The Astronomical Journal*, 110(1) :430–438, july 1995.
- [26] Julien Borgnino, François Martin, and Aziz Ziad. Effect of a finite spatial coherence outer scale on the covariances of angle-of-arrival fluctuations. *Optics Communications*, 91 :267–279, 1992.
- [27] Roberto Ragazzoni. No laser guide stars for addaptive optics in giant telescopes. *Astronomy and Astrophysics, Supplement Series*, 1(136) :205–209, april 1999.
- [28] T.R. Rimmele. Solar adaptive optics. In *Astronomical Telescopes and Instrumentation 2000*, volume 4007, pages 116+. SPIE, March 2000.
- [29] Miska Le Louarn, Renaud Foy, Norbert Hubin, and Michel Tallon. Laser guide star for 3.6m and 8m telescopes : Performance and astrophysical implications. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2000.
- [30] Miska Lelouarn. *Étoiles laser pour les grands télescopes : effet de cône et implications astrophysiques*. PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon I, 2000.
- [31] N. Ageorges and N. Hubin. Atmospheric sodium monitor for laser guide star adaptive optics. *Astronomy and Astrophysics Supplements*, 144 :533–540, June 2000.
- [32] François Rigaut and Éric Gendron. Laser guide star in adaptive optics : the tilt determination problem. *Astronomy and Astrophysics*, 261 :677–684, 1992.

- [33] J.C. Fontanella. Analyse de surface d'onde, déconvolution et optique active. *Journal of Optics*, 16(6) :257–268, 1985.
- [34] R. Ragazzoni, S. Esposito, and E. Marchetti. Auxiliary telescopes for the absolute tip-tilt determination of a laser guide star. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 276 :L76–L78, October 1995.
- [35] Roberto Ragazzoni. Propagation delay of a laser beacon as a tool to retrieve absolute tilt measurements. *The Astrophysical Journal*, 465 :73–75, July 1996.
- [36] Roberto Ragazzoni and Enrico Marchetti. Further techniques for lgs tilt recovery : the perspective and the predictive approach. *Proceeding SPIE*, 2871 :948–952, March 1997.
- [37] Roberto Ragazzoni and Simone Esposito. Laser guide star absolute tilt recovery using a single auxiliary telescope. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 307 :55–57, July 1999.
- [38] Christophe Bonnal. La pollution spatiale devient un enjeu économique. *La Recherche*, 306 :54–58, february 200.
- [39] Max Born and Emil Wolf. *Principles of Optics*. Pergamon Press, 5th edition, 1975.
- [40] C.W. Allen. *Astrophysical Quantities*. University of London, 1976.
- [41] R. Foy, M. Tallon, I. Tallon-Bosc, É. Thiébaud, J. Vaillant, F. Foy, D. Robert, H. Freidman, F. Biraben, G. Grynberg, J.P. Gex, A. Mens, A. Migus, J.M. Weulersse, and D. Butler. Photometric observation of a polychromatic laser guide star. *Journal of the Optical Society of America*, 17 :2236–2242, december 2000.
- [42] M. Schoeck, R. Foy, J. Pique, P. Chevrou, N. Ageorges, A. D. Petit, V. Bellanger, H. Fewes, F. Foy, C. Hoegemann, M. Laubscher, O. Peillet, P. Segonds, M. Tallon, and J. Weulersse. Pass-2 : quantitative photometric measurements of the polychromatic laser guide star. *SPIE Proceedings*, 4007 :296–307, July 2000.
- [43] M. Schoeck, J. Pique, A. D. Petit, P. Chevrou, V. Michau, G. Grynberg, A. Migus, N. Ageorges, V. Bellanger, F. Biraben, R. Deron, H. Fewes, F. Foy, C. Hoegemann, M. Laubscher, D. Mueller, C. d'Orgeville, O. Peillet, M. Redfern, R. Foy, P. Segonds, R. Soden, M. Tallon, E. Thiebaut, A. Tokovinin, J. Vaillant, and J. Weulersse. Elp-oa :

- measuring the wavefront tilt without a natural guide star. *SPIE Proceedings*, 4125 :41–52, November 2000.
- [44] R. Foy, J.P. Pique, A.D. Petit, P. Chevrou, V. Michau, G. Grynberg, A. Migus, N. Ageorges, V. Bellanger, F. Biraben, R. Deron, H. Few, F. Foy, C. Goegemann, M. Laubscher, D. Mueller, C. d’Orgeville, O. Peillet, M Redfern, M. Schoeck, P. Segonds, M. Soden, R. Tallon, E. Thiebaut, A. Tokovinin, J. Vaillant, and J. Weulersse. Elpoa : toward the tilt measurement from a polychromatic laser guide star. In *SPIE proceeding, Astronomical telescopes and instrumentation 2000*, volume 4007, pages 284–295. SPIE, july 2000.
- [45] R. Foy, J.P. Pique, A.D. Petit, P. Chevrou, V. Michau, G. Grynberg, A. Migus, N. Ageorges, V. Bellanger, F. Biraben, R. Deron, H. Few, F. Foy, C. Goegemann, M. Laubscher, D. Mueller, C. d’Orgeville, O. Peillet, M Redfern, M. Schoeck, P. Segonds, M. Soden, R. Tallon, E. Thiebaut, A. Tokovinin, J. Vaillant, and J. Weulersse. Polychromatic guide star : feasibility study. In *SPIE proceeding*, volume 4065, pages 312–323. SPIE, aug 2000.
- [46] A. Tokovinin. Pendular seismometer for correcting telescope vibrations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 316 :637–641, August 2000.
- [47] A. Danjon and A. Couder. *Lunette et Télescopes*. Blanchard, 1935.
- [48] P.R. Jorden, J. Deltorn, and A.P. Oates. Nonuniformity of ccds and the effects of spatial undersampling. *SPIE Proceedings*, 2198 :836–850, June 1994.
- [49] H.M. Martin. Image motion as a measure of seeing quality. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 99 :1360–1370, December 1987.
- [50] D. Saint-Jacques. Taylor’s hypothesis : good for nuts. In *Astronomical Telescopes and Instrumentation 2000*, volume 4006. SPIE, 2000.
- [51] *Numerical Recipes in C : The art of scientific computing*. Cambridge University Press, 1992. ISBN 0-521-43108-5.
- [52] Titterton D.M. General structure of regularisation procedures in image reconstruction. *Astronomy and Astrophysics*, 144 :381–387, 1985.

- [53] A.M. Thompson, J.C. Brown, J.W. Kay, and D.M. Titterington. A study of methods of choosing the smoothing parameter in image restoration by regularization. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(4) :326 – 339, April 1991.
- [54] Guy Demoment. Image reconstruction and restoration : overview of common estimation structures and problems. *IEEE transactions on acoustics, speech and signal processing*, 37(12) :2024–2034, dec 1989.
- [55] R.G. Lane. Methods for maximum-likelihood deconvolution. *Journal of the optical Society of America A*, 13(10), October 1992.
- [56] J. Vaillant, É. Thiébaud, and M. Tallon. Elpoa : Data processing of chromatic differences of the tilt measured with a polychromatic laser guide star. In *SPIE proceeding, Astronomical telescopes and instrumentation 2000*, volume 4007, pages 308–315. SPIE, july 2000.

## **Chapitre 8**

### **Annexes**



## **8.1 Communication présentée au colloque SPIE « Astronomical Telescopes and Instrumentation 2000 » à Munich**

# ELPOA: Data processing of chromatic differences of the tilt measured with a polychromatic laser guide star.

Jérôme Vaillant, Éric Thiébaud, Michel Tallon

Centre de Recherches Astronomiques de Lyon (CRAL),  
Observatoire de Lyon, F-69561 Saint Genis Laval Cedex, France

## ABSTRACT

In this paper we present an experiment for measuring the chromatic differences of the tilt used a for polychromatic laser guide star, a suitable solution to overcome the monochromatic laser guide star limitation: the tilt indetermination. A comparative study between two types of data processing is done: the classical estimation of angle of arrival by the image center of gravity, and a new one: an estimation of tilts by fitting a phase map in the polychromatic case. From these studies, expected precision is derived and comparison between simulations and data is done.

**Keywords:** Laser guide star, tilt indetermination, refractive air index, image processing, centroiding, wavefront estimation

## 1. INTRODUCTION: MEASURING THE CHROMATIC DIFFERENCES OF THE TILT

Measuring the chromatic differences of the tilt (also called differential tilt) is a corner stone of polychromatic laser guide star (henceforth PLGS). The PLGS, proposed by R.Foy et al. in 1995<sup>1</sup> is a suitable solution to the “tilt problem”. By tilt problem we mean the impossibility of an adaptive optic system to sense the tilt (mean slope of the wavefront) from a monochromatic laser guide star.<sup>2</sup> This limitation has a great impact on sky coverage<sup>3,4</sup> (which is nearly null on the visible range). So finding a suitable solution to overcome this drawback of monochromatic laser guide stars has motivated many studies.<sup>1,5-7</sup>

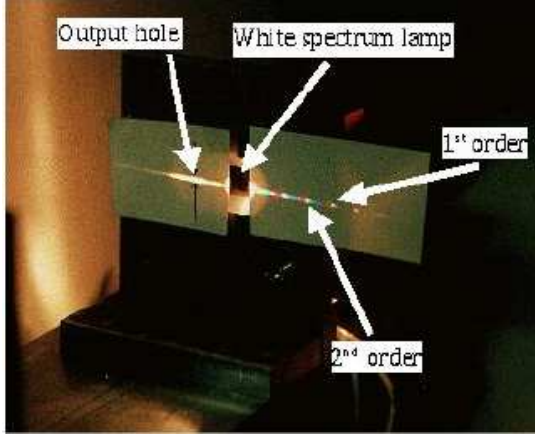
Here we present our work about measuring the differential tilt, motivated by the fact that this measurement has never been done successfully up to day. Indeed, as we will see on the following, the differential tilt is tiny compared to the tilt so it is a right assumption to neglect it in adaptive optic systems. Nevertheless it is a key for solving tilt problem. Determination of the tilt from the differential tilt uses the air refractive index chromaticity associated with a polychromatic backscattering.<sup>8</sup> Applying the properties of air index variations with wavelength, the tilt can be estimated from the chromatic differences of the tilt using the formula<sup>1</sup>:

$$\theta_{\lambda_3} = \frac{n_{\lambda_3} - 1}{n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}} (\theta_{\lambda_1} - \theta_{\lambda_2}) \quad (1)$$

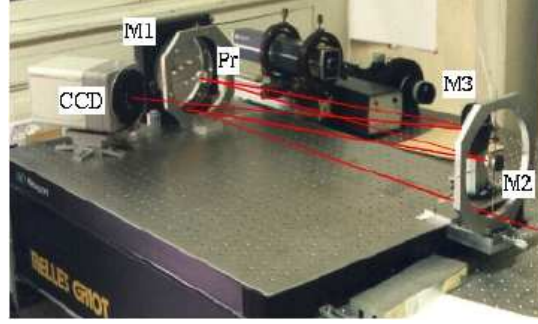
Where  $\theta_\lambda$  and  $n_\lambda$  denote respectively the tilt and the air refractive index at the wavelength  $\lambda$ . It is important to note that this relation is valid not only for the tilt, but also for any mode or linear function of modes, except the piston (average of wavefront over the pupil), especially the angle of arrival. The smallness of the differential tilt lays on the factor  $\Delta n/(n-1)$  which is less than 1/25 for visible range ( $\Delta n$  denote the difference of air index). The differential tilt measurement requires a high quality measurement and an careful data processing as done in the MaTilD experiment to demonstrate its feasibility (see section 2). To achieve the best measurement as possible, we have developed two types of data processing: the usual image center of gravity to determine the angle of arrival, and a phase screen model fitting in polychromatic case to estimate the tilt mode; and for each one, we have estimated errors (see section 3). As a conclusion and based on previous estimations we compare simulation and real data results (see section 4).

## 2. MATILD: DESCRIPTION OF THE EXPERIMENTAL SETUP

The MaTilD experiment (which is the French achronim of “Differential Tilt Manipulation”) was devised for demonstrating the feasibility of the differential tilt measurement and not for simulating for polychromatic laser star. So we choose to work in real conditions as best as possible. This mean a high flux, choice and monitoring of wavelengths, an optimal  $D/r_0 \simeq 4$  as recommended by Fried,<sup>9</sup> a setup which avoid vibrations (equivalent to an achromatic tilt) easier than monitoring they, for instance with a pendular seismometer.<sup>10</sup>



(a) Source of MaTilD



(b) Instrument of MaTilD

**Figure 1.** MaTilD: the multi-wavelength point-like source (a) is generated with an Échelle grating using the superposition of orders and the instrument (b) condense the beam (M1 and M2), disperse wavelengths (prism Pr) and make an image of the point source at each wavelengths with M3 on a CCD chip. During data acquisition, light coming for the source propagates through 100m of turbulent atmosphere to the instrument, the beam is 3 – 16m height (determining roughly the large scale of turbulence).

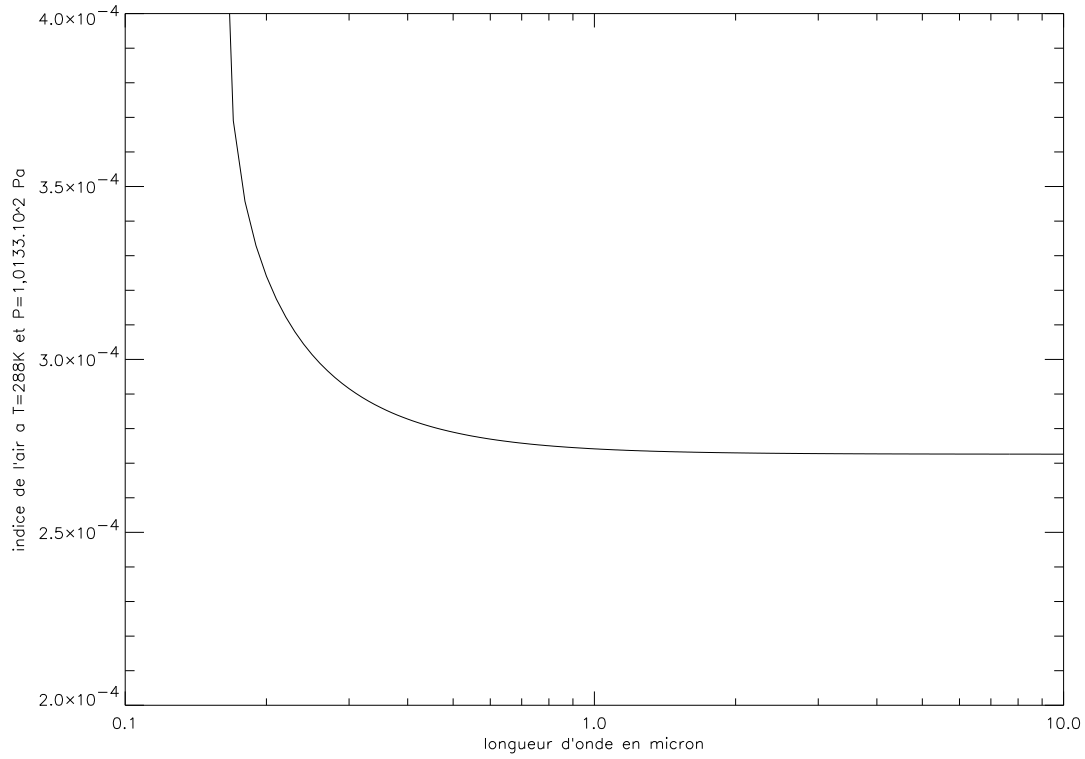
Under these constraints, the setup is the following: a horizontal propagation through the atmosphere, a point-like source with a discrete line spectrum and an instrument which separates wavelengths and make images of the point source (see figure 1). In each frame we have simultaneously, at each wavelength, the turbulence perturbed image of the point like source. As we take short exposure frames, the turbulence is frozen so there is a non-nil tilt which will be the same for all wavelengths except the expected differential tilt.

The primary mirror of the instrument has a diameter of 150mm which is a good trade-off between size and easiness of use considering, as shown by Fried, that the tilt excursion is maximized compared to image extension where  $D/r_0 \simeq 4$ .  $r_0 = 3,5\text{cm}$  is achieved at Lyon Observatory under standard turbulence with a 100m horizontal propagation.

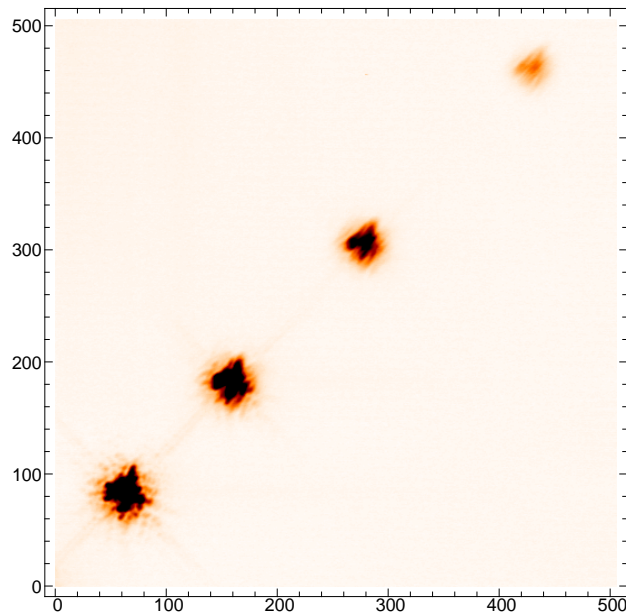
The choice of wavelengths range is done considering the air index variation: the shorter and the more different the wavelengths are the bigger the differential tilt is (see air index curve in figure 2). Taking into account the efficiency of our CCD camera and optics transmission, the spectral range is  $673\text{nm} \rightarrow 337\text{nm}$  with four wavelengths in (673nm, 505nm, 404nm, 337nm). Distance between spots, on the CCD chip, have to be maximized to limit the effect of overlapping between monochromatic images. To allow different types of data processing we do not design an instrument too specific: images are sampled around Shannon frequency (equal at 500 nm). The scale is 0.33" per pixel and resulting in an under-sampling of 67% at the shortest wavelength (337nm). For the detector, a CCD chip of  $512 \times 512$  pixels (pixel size  $25\mu\text{m}$ ) with a readout noise of 8 electrons is used. The dark current is totally negligible in short exposure images (20 ms). Data acquisition have been done during a clear winter night with a light wind and a  $r_0$  of 4cm. 200 frames have been acquired and before processing they have been corrected for average dark and flat fields; typical frame looks like figure 3

### 3. DATA PROCESSING

In this part we consider two types of data processing to estimate the differential tilt: the usual one, computation of the center of gravity (see section 3.1) and a finer solution, the phase map fitting in polychromatic case (see section 3.2).



**Figure 2.** Air refractive index variation<sup>11</sup> with wavelength, in normal condition of pressure and temperature. Note that the difference of air index is bigger if wavelengths are more different and in the ultraviolet range.



**Figure 3.** Typical frame obtained with the MaTilD experiment, from the bottom left corner to the top right corner wavelengths are: 673nm, 505nm, 404nm and 337nm

### 3.1. center of gravity

The center of gravity is largely used as an estimation of the tilt in Shark-Hartman detectors because it is a simple and fast technique. Despite it is an estimation of angle of arrival and not tilt\*, as shown by Tatarskii,<sup>12</sup> we use it because the relation (1) is valid for tilt or angle of arrival. A great advantage of the center of gravity is that errors due to photon noise, sampling and CCD read-out noise can be estimated analytically as shown in the next three sections. But for other effects like windowing or image overlapping only simulation give an estimation of their impacts, because these noises are highly non-linear and turbulence dependent; this is done on the last section.

#### 3.1.1. Effect of photon noise

The photon noise is due to the random nature of photons arrival which follow a Poisson law. This noise is always present and is the theoretical limitation because it can not be reduced by using better technology (as readout noise does for example). Its effect is studied by considering the center of gravity as the average of all photon positions  $x_i$ :

$$x_0 = \frac{1}{N_{ph}} \sum_i^{N_{ph}} x_i \quad (2)$$

This shows directly that the photon noise introduces no bias on the center of gravity estimation, but a noise. This noise, as a random error, can be characterized by its variance that is equal to the second order momentum of photon positions in image plane divided by the total number of detected photons:

$$\text{Var}(\varepsilon_{ph}) = \frac{M_2(x_i)}{N_{ph}} \quad (3)$$

Applying this relation for a Gaussian shaped image ( $M_2(x_i) = \sigma_{\text{image}}^2$ , the variance of the Gaussian) we retrieve the well known standard deviation of photon noise error<sup>13</sup>:  $\sigma_{\text{image}} / \sqrt{N_{ph}}$ .

#### 3.1.2. Effect of spatial sampling

Now we consider the effect of the finite size of pixels. The photon position is not known with a precision better than the pixel size: information is lost about where the photon hits the CCD a pixel. To study this noise, let us note that the intensity given by the CCD is averaged over the pixel and that the center of gravity is the first order momentum of intensity. Using the properties of the Fourier transform relative to derivative and first order momentum of a function, we demonstrate that sampling introduce a bias:

$$B_{\text{sampling}} = \frac{\Delta x}{\pi} \sum_{k>0} \frac{(-1)^{k+1} \Delta x}{k} \Im[\hat{I}(\frac{k}{\Delta x})] \quad (4)$$

where  $\Delta x$  denotes the pixel size and  $\Im[\hat{I}]$  the imaginary part of the intensity Fourier transform in image plane.

It is important to see that this bias is null as soon as the sampling frequency is greater than half of the Shannon frequency. This result from the representation of the center of gravity in Fourier space: it is the phase of the power spectral density at zero frequency. So aliasing is acceptable until it does not perturb the zero frequency: for the center of gravity estimation, we can under-sample with a factor 2 compared to Shannon sampling. Considering this, the number of pixels could be reduced by a factor 4 (for the point of view of sampling effect).

In the following we consider that we have no bias; this is the case in MaTilD experiment. Under this assumption we find the variance of the sampling error equal to:

$$\text{Var}(\varepsilon_{\text{sampling}}) = \frac{(\Delta x)^2}{12} \quad (5)$$

It is interesting to note this is the variance of an uniform distribution of width  $\Delta x$ ; in fact the distribution of position error inside a pixel is uniform. A large under-sampling (perturbing the zero frequency) adds more complex terms that grow up the variance (with  $\Re(z)$  is the real part of the complex  $z$ ):

$$\text{Var}(\varepsilon_{\text{sampling}}) = \frac{(\Delta x)^2}{12} + \frac{\Delta x}{\pi^2} \sum_{k>0} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \Re\left(\hat{f}'\left(\frac{k}{\Delta x}\right)\right) - \frac{\Delta x^2}{\pi^2} \sum_{k>0} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \Re\left(\hat{f}\left(\frac{k}{\Delta x}\right)\right) \quad (6)$$

---

\*For example a pure coma image have a non-nil center of gravity even there is no tilt at all

This error must be taking into account when photon noise estimation is done; the photon position second order momentum is increased by adding the  $Var(\varepsilon_{sampling})$ . In the case of MaTilD experiment, the total number of photons per wavelength is  $\simeq 10^6$ , and the second order momentum of image is  $\simeq 64$  pixel<sup>2</sup>. Combined effect of photon and sampling noises gives an error with a standard deviation error  $\simeq 6 - 20 \cdot 10^{-3}$  pixel.

### 3.1.3. Effect of an additive noise

By additive noise we consider every noises independent of the signal; the most important is the CCD readout noise, but is also present the noise due to thermal charge generation and the sampling error in intensity due to the finite number of sampling level. Without lost of generality lets consider a centered additive noise characterized by a standard deviation  $\sigma_{add}$ . Then the estimation of the center of gravity  $x_0$  in a  $M \times M$  pixels window is biased by:

$$B_{add} = x_0 M^2 \frac{\sigma_{add}^2}{N_{ph}^2} - \frac{\sigma_{add}^2}{N_{ph}^2} \sum_i^M i \Delta x \quad (7)$$

This bias can be minimized by choosing a window centered on  $x_0$ . Therefore The sum of  $i \Delta x$ , taken between  $-M/2$  and  $M/2$ , is null. Then  $x_0 \leq \Delta x/2$  and the bias is less than:

$$B_{add} \leq M^2 \frac{\Delta x \sigma_{add}^2}{2 N_{ph}^2} \quad (8)$$

In the case of MaTilD experiment, the window size is  $\simeq 100$  pixels (to limit the windowing error), so the bias is less than:  $0.02 \cdot 10^{-6}$  pixel and is negligible compared to other noises.

Assuming the computation window is centered on the center of gravity, we can derived the variance the error:

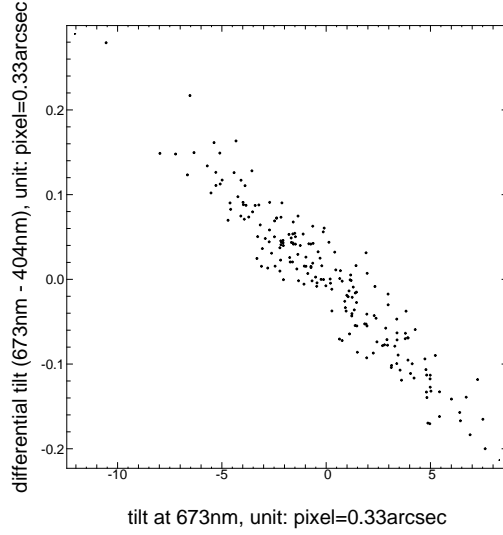
$$Var(\varepsilon_{add}) = x_0^2 2 M^2 \frac{\sigma_{add}^2}{N_{ph}^2} + \frac{M^2 (M^2 - 1) (\Delta x)^2}{12 N_{ph}^2} \sigma_{add}^2 \quad (9)$$

In MaTilD experiment, this gives an additive noise standard deviation  $\simeq 5 - 10 \cdot 10^{-3}$ , this is less or equal to photon noise. We see the window size is very important because this variance varies as  $M^4$ . But as we will see in the following there is a trade-off between the additive noise and the error due to windowing which is larger as the window is smaller.

### 3.1.4. Simulation: effect for windowing and overlapping

Here we consider non-linear effects which depend on turbulence and on the experience. The first one is the image windowing due, in detection process, to the finite size of detector and, in data processing, to the computation window. In case of centro-symmetric images, this effect is null because the forgotten signal will not change the position of the center of gravity. But in the non symmetric image case, the windowing induces a bias. This bias leads to underestimate the center of gravity and depends on image pattern. Because it is different from image to image, a solution to study this phenomena is to make simulation with turbulence modeled by a Kolmogorov phase screen. Its characteristics like  $r_0$  or the smallest pattern (related to the inner scale) are deduced from the experiment. The simulation was done for 200 phase screens. The result is that the windowing bias is as important as the other noises with a standard deviation  $\simeq 10 - 20 \cdot 10^{-3}$  pixels. This bias could be reduce by increasing the window size but then additive noise grows rapidly and the second non-linear effect too: the overlapping of image on the detector. The origin of this effect is that the wing of a monochromatic image pattern is added to the flux from other wavelength images, biasing also the center of gravity. So there is a trade off than could be made, but the gain in term of precision is not significant on MaTilD experiment (the optimal window size is between 100 and 150 pixels depending on the wavelength).

This study allow us to predict the signal to noise ratio for the MaTilD experiment in case of centroiding. The final precision on measurements is  $\simeq 20 - 30 \cdot 10^{-3}$  pixel and the differential tilt between the different wavelengths is  $\simeq 30 - 120 \cdot 10^{-3}$ , its gives a signal to noise ration of 6. A typical correlation between the tilt and the differential tilt is shown in figure 4



**Figure 4.** Correlation between differential tilt (673nm-404nm) and tilt (at 673nm). This correlation is obtained by using 200 simulations of MaTilD like images, including all the noise sources previously studied.

### 3.2. Fitting phase screen model

The tilt measured by centroiding makes no assumption about the shape of the images. We expect a noticeable improvement if a suitable model can be fitted onto the data. In MaTilD experiment, the observed brightness distribution  $d_{\mathbf{x}}$  is the (incoherent) superposition of monochromatic PSF's plus some noise, hence the model:

$$m_{\mathbf{x}} = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} |a_{\lambda, \mathbf{x}}|^2 \quad (10)$$

where  $\mathbf{x}$  is the 2D position in the sampled image, the  $\alpha_{\lambda} \geq 0$  are the intensities and the  $a_{\lambda, \mathbf{x}}$  are the normalized complex amplitudes in the image plane which are the (backward) discrete Fourier transform (DFT) of the complex amplitude  $\hat{a}_{\lambda, \mathbf{u}}$  in the pupil plane:

$$a_{\lambda, \mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{u}} F_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} \hat{a}_{\lambda, \mathbf{u}} \quad \text{with} \quad F_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} = e^{+i2\pi \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} / M} \quad (11)$$

where  $M$  is the number of pixels per image side. Assuming that the pupil-plane amplitude is due to a phase screen  $\varphi_{\lambda, \mathbf{u}}$  over the pupil  $p_{\lambda, \mathbf{u}}$ , holds:

$$\hat{a}_{\lambda, \mathbf{u}} = p_{\lambda, \mathbf{u}} e^{i\varphi_{\lambda, \mathbf{u}}} \quad (12)$$

the phase in the pupil can be approximated by its expansion onto a finite basis of functions, e.g. the Zernike polynomials,  $\{B_k(\mathbf{r}); k = 1..N_{\text{basis}}\}$  where  $\mathbf{r} = \lambda \mathbf{u}$  is the position in the pupil:

$$\varphi_{\lambda, \mathbf{u}} = \beta_{\lambda} \sum_{k=1}^{N_{\text{basis}}} c_{k, \lambda} b_{k, \lambda, \mathbf{u}} \quad (13)$$

with  $b_{k, \lambda, \mathbf{u}} = B_k(\lambda \mathbf{u})$  and where  $\beta_{\lambda} \propto (n_{\lambda} - 1)/\lambda$  and where the  $c_{k, \lambda}$  are coefficients of the expansion.

As it is customary done, we obtain the parameters of the model by minimizing the likelihood term of the data  $d_{\mathbf{x}}$  with respect to the model  $m_{\mathbf{x}}$ :

$$L(\mathbf{d}|\mathbf{m}) = \sum_{\mathbf{x}} w_{\mathbf{x}} [d_{\mathbf{x}} - m_{\mathbf{x}}]^2 \quad \text{with} \quad w_{\mathbf{x}} = \begin{cases} 1/\text{Var}(d_{\mathbf{x}}) & \text{where data is available} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (14)$$

flux (counts)	$10^4$	$10^5$	$10^6$
number of simulations	100	100	500
RMS differential tilt error (pixels)			
centroid	0.311	0.0397	0.0103
$N_{\text{basis}} = 3$	0.033	0.0062	0.0055
$N_{\text{basis}} = 4$	0.032	0.0061	0.0053
$N_{\text{basis}} = 5$	0.034	0.0057	0.0049
$N_{\text{basis}} = 6$	0.037	0.0054	0.0047
$N_{\text{basis}} = 7$	0.042	0.0056	0.0047
$N_{\text{basis}} = 8$	0.046	0.0047	0.0044
$N_{\text{basis}} = 9$	0.050	0.0052	0.0044

**Table 1.** Precision for the measured differential tilt by different methods: the center of gravity method (first line named “centroid”) and the fit of a phase screen model (following lines).

We used a *modified* Newton algorithm to fit the phase coefficients. Since the likelihood quadratically depends on the intensities  $\alpha_\lambda$ , the best set of intensities at every iteration can be directly obtained by least square fit (which involves a single matrix inversion). We choose the basis of functions such that the phase tilt is uniquely given by the 2 first modes  $B_1(\mathbf{r})$  and  $B_2(\mathbf{r})$ . With this property, in the polychromatic case, all the  $c_{k,\lambda}$  but the 2 first ones (i.e. the tilt) becomes identical (i.e. same optical path perturbation) for all wavelengths.

In order to compare the centroid and phase fit methods, we measured the differential tilt from 2 independent monochromatic realizations with brightness distributions  $I(\mathbf{x})$  and  $I(\mathbf{x} - \Delta\mathbf{x})$  respectively (i.e. same total flux, and same Kolmogorov phase screen except by a slight tilt  $\propto \Delta\mathbf{x}$ ). In our simulations, the image size was  $64 \times 64$ , the pupil diameter was 31 *freuqels* (i.e. Shannon sampling) with a central obstruction of 1/3; random turbulent phase screens with  $D/r_0 = 4$  were used, the additive background noise level was 2 counts RMS, and we varied the total flux and the number of modes  $N_{\text{basis}}$ . Comparison between different measurement of differential tilt are summarized in Table 1. The phase fit method appears to improve the estimate of the differential tilt by a factor greater than 2 at high fluxes ( $10^6$  counts) and up to a factor of almost 10 at low fluxes ( $10^4$  counts).

The number  $N_{\text{basis}}$  of modes is a means to tune the regularization level of the inverse problem of obtaining the model from the data: with too many modes, the model will fit noise artifacts; on the contrary with too few modes, the model will be unable to fit true phase aberrations. In other words, we expect the best performances with the phase fit method for a suitable number of modes which should depends on incoming flux and background noise level. This behavior can be seen in Table 1.

#### 4. CONCLUSION: FROM SIMULATIONS TO DATA

As shown by simulation, the differential tilt can be measured on data; with a better reliability for phase map fitting. Up to day, the processing of real data does not yet give the result attempted from simulations. But there is some possible sources of noise that haven’t been considered, like error in flat field correction or inhomogeneity of sensitivity inside pixel. But a qualitative estimation show they won’t be significant, so the demonstration of measurability of differential tilt would be done in a very short future.

#### ACKNOWLEDGMENTS

We are most grateful to the technical staff at the Observatoire de Lyon for their help. The work has been done with the support of the CNRS/PNHRA, the Région Rhones-Alpes contract L14840.00.00/97018030 and the CNRS/Ulimatech.

#### REFERENCES

1. R. Foy, A. Migus, F. Biraben, G. Grynberg, P. R. McCullough, and M. Tallon, “The polychromatic artificial sodium star: A new concept for correcting the atmospheric tilt,” *Astronomy and Astrophysics, Supplement Series* **111**, pp. 569–578, June 1995.



2. M. Séchaud, N. Hubin, L. Brixon, R. Jalin, R. Foy, and M. Tallon, "Laser Backscattered Reference Star for Atmospheric Wavefront Disturbances Measurement," in *Very Large Telescopes and their Instrumentation*, U. M.-H., ed., ESO/NOAO Conferences, pp. 705–714, ESO, (Garching, Germany), 1988.
3. F. Rigaut and E. Gendron, "Laser guide star in adaptive optics: the tilt determination problem," *Astronomy and Astrophysics* **261**, pp. 677–684, 1992.
4. M. Le Louarn, N. N. Hubin, R. Foy, and M. Tallon, "Sky coverage and psf shape with lgs ao on 8-m telescopes," *Proceeding SPIE* **3353**, pp. 364–370, Sept. 1998.
5. R. Ragazzoni, S. Esposito, and E. Marchetti, "Auxiliary telescopes for the absolute tip-tilt determination of a laser guide star," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **276**, pp. L76–L78, Oct. 1995.
6. R. Ragazzoni, "propagation delay of a laser beacon as a tool to retrieve absolute tilt measurements," *The Astrophysical Journal* **465**, pp. 73–75, July 1996.
7. R. Ragazzoni and E. Marchetti, "Further techniques for lgs tilt recovery: the perspective and the predictive approach," *Proceeding SPIE* **2871**, pp. 948–952, Mar. 1997.
8. M. Schöck, R. Foy, J.-P. Pique, P. Chevrou, N. Ageorges, A. Petit, V. Bellanger, H. Fewes, F.-C. Foy, C. Högemann, M. Laubscher, O. Peillet, P. Segonds, M. Tallon, and J.-M. Weulersse, "Pass-2: Quantitive measurements of the polychromatic laser guide star," in *in this proceedings*, SPIE, 2000.
9. D. L. Fried, "optical resolution through a randomly inhomogeneous maedium for very long and very short exposures," *Journal of Optical Society of America* **56**, 1996.
10. a. Tokovinin, "Pendular seismometer for correcting telescope pointing errors," in *in this proceedings*, SPIE, 2000.
11. C. W. Allen, *Astrophysical Quantities*, The Athlone Press, University of London, 1976.
12. V. I. Tatarskii, *The effects of the turbulent atmosphere on wave propagation*, Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1971, 1971.
13. J. C. Fontanella, "Analyse de surface d'onde, déconvolution et optique active," *Journal of Optics* **16**, 1985.

## **8.2 Article présenté au colloque SPIE « Astronomical Telescopes and Instrumentation 2000 » à Munich**

## ELPOA: Toward the tilt measurement from a polychromatic laser guide star.

Renaud Foy<sup>1</sup>, Jean-Paul Pique<sup>2</sup>, Alain Petit<sup>3</sup>, Patrick Chevrou<sup>4</sup>,

Vincent Michau<sup>5</sup>, Pascale Prigent<sup>6</sup>, Gilbert Grynberg<sup>7</sup>, Arnold Migus<sup>8</sup>, Nancy Ageorges<sup>9</sup>,

Véronique Bellanger<sup>2</sup>, François Biraben<sup>7</sup>, Ruy Deron<sup>5</sup>, Hayden Few<sup>9</sup>, Françoise Foy<sup>1</sup>, Claudia Högemar

Pascal Jagourel<sup>6</sup>, Markus Laubscher<sup>2</sup>, Daniel Müller<sup>2</sup>, Céline d'Orgeville<sup>2</sup>, Olivier Peillet<sup>4</sup>,

Mike Redfern<sup>9</sup>, Matthias Schöck<sup>1</sup>, Patricia Segonds<sup>2</sup>, Richard Soden<sup>2,1</sup>, Michel Tallon<sup>1</sup>,

Isabelle Tallon-Bosc<sup>1</sup>, Éric Thiébaud<sup>1</sup>, Andrei Tokovinin<sup>1</sup>, Jérôme Vaillant<sup>1</sup>, Jean-Marc Weulersse<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Centre de Recherches Astronomiques de Lyon (CRAL),

Observatoire de Lyon, 69561 Saint Genis Laval Cedex, France

<sup>2</sup>Laboratoire de Spectrométrie Physique (LSP: UMR CNRS-UJF 5588),

Université Joseph Fourier de Grenoble, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France

<sup>3</sup>Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA/DCC/DPE), 91191 Gif-sur-Yvette, France

<sup>4</sup>Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA/DCC/DTE), 26700 Pierrelatte, France

<sup>5</sup>Office National d'Études et de Réalisations aérospatiales, BP 72 92322 Châtillon cedex, France

<sup>6</sup>Compagnie Industrielle des Lasers, BP 27, 91460 Marcoussis, France

<sup>7</sup>Laboratoire Kastler-Brossel, École Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France

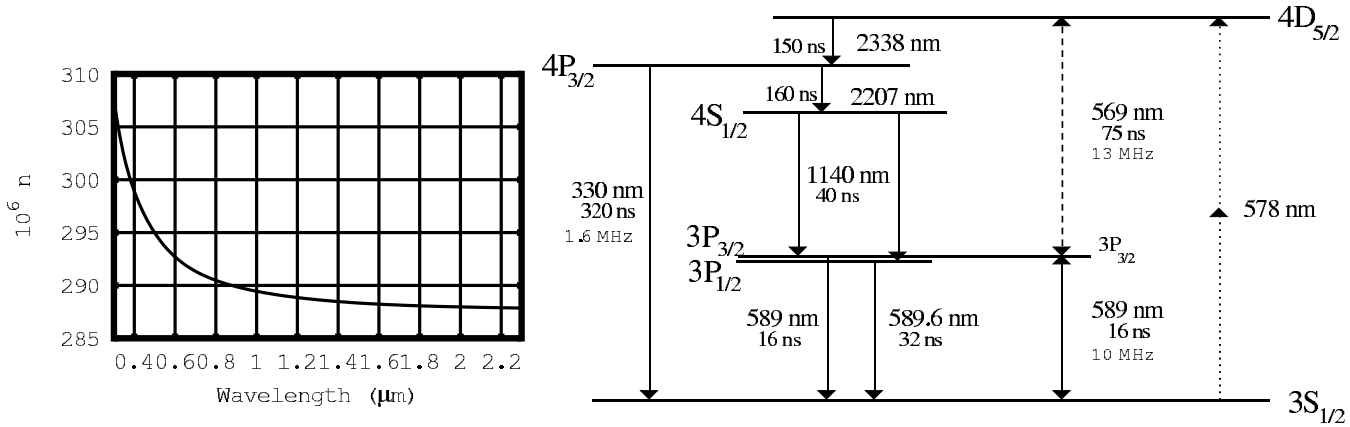
<sup>8</sup>Laboratoire pour l'Utilisation des Lasers Intenses, École Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

<sup>9</sup>Physics Department, National University of Ireland, Galway, Ireland

Adaptive optics at astronomical telescopes aims at correcting in real time the phase corrugations of incoming wavefronts caused by the turbulent atmosphere, as early proposed by Babcock.<sup>1</sup> Measuring the phase errors requires a bright source, which is located within the isoplanatic patch of the programme source. The probability that such a reference source exists is a function of the wavelength of the observation, of the required image quality (Strehl ratio), of the turbulence optical properties, and of the direction of the observation. Several papers have addressed the problem of the sky coverage as a function of these parameters (see e.g.: Le Louarn et al<sup>2</sup>). It turns out that the sky coverage is disastrously low in particular in the short (visible) wavelength range where, unfortunately, the gain in spatial resolution brought by adaptive optics is the largest. Foy and Labeyrie<sup>3</sup> have proposed to overcome this difficulty by creating an artificial point source in the sky in the direction of the observation relying on the backscattered light due to a laser beam. This laser guide star (hereafter referred to as LGS) can be bright enough to allow us to accurately measure the wavefront phase errors, except for two modes which are the piston (which is not relevant in this case) and the tilt. Pilkington<sup>4</sup> has emphasized that the round trip time of the laser beam to the mesosphere, where the LGS is most often formed, is significantly shorter than the typical tilt coherence time; then the inverse-return-of-light principle causes deflections of the outgoing and the ingoing beams to cancel. The apparent direction of the LGS is independent of the tilt. Therefore the tilt cannot be measured.

Until now, the way to overcome this difficulty has been to use a natural guide star to sense the tilt.<sup>5-7</sup> Although the tilt is sensed through the entire telescope pupil, one cannot use a faint source because  $\approx 90\%$  of the variance of the phase error is in the tilt. Therefore, correcting the tilt requires a higher accuracy of the measurements than for higher orders of the wavefront.<sup>8</sup> Hence current adaptive optics devices coupled with a LGS face low sky coverage.<sup>9,2</sup> Several methods have been proposed to get a partial or total sky coverage for the tilt, such as the *dual adaptive optics concept*,<sup>8</sup> the *elongation perspective method*,<sup>10,11</sup> or the polychromatic LGS<sup>12,13</sup> (hereafter referred to as PLGS).

We present here a progress report of the R&D programme *Étoile Laser Polychromatique et Optique Adaptative (ELP-OA)* carried out in France to develop the PLGS concept. After a short recall of the principles of the PLGS, we will review the goal of *ELP-OA* and the steps to get over to bring it into play.



**Figure 1.** Variation of the refractive index of air with wavelength **Figure 2.** Diagram of the most significant energy levels of sodium. Wavelengths (in nm) and lifetime (in ns) of the transitions are given, as well as the homogeneous widths (in MHz) of the 589, 569, and 330 nm transitions.

## 1. PRINCIPLE OF THE PLGS

The concept of the PLGS relies on the chromatic properties of the refractive index of air,  $n$ . Figure 1 shows that  $n$  varies with the wavelength, quite abruptly in the ultraviolet range. Thus, a process which produces backscattered light at several different wavelength in the uppermost atmosphere, including ultraviolet lines, will cause the backscattered light to cross the atmosphere through different optical paths. Such a process can be stimulated by exciting mesospheric sodium atoms up to the  $4D_{5/2}$  energy level, from which the radiative decay down to the ground level produces a line spectrum spanning the wavelength interval from 330 nm to  $2.3 \mu\text{m}$ , as shown in Fig. 2. A two-photon coherent absorption through the  $3P_{3/2}$  energy level and the 589 and 569 nm transition allows us to reach the  $4D_{5/2}$  energy level.

The monochromatic components of the polychromatic LGS appears slightly shifted in the sky: this is the differential tilt,  $\delta\theta$ . It is related to the tilt,  $\theta$ , through

$$\delta\theta = \theta \times \delta n / (n - 1), \quad (1)$$

where  $\delta n$  stands for the variation of  $n$  over the wavelength baseline of the monochromatic components used for the differential tilt measurements. More details about the conditions of this excitation of mesospheric sodium atoms are given in Foy et al.<sup>13</sup> Let us recall here two useful numbers, which are the laser peak power of the saturation of the absorption in the two transitions :  $185 \text{ W m}^{-2}$  and  $475 \text{ W m}^{-2}$  per spectral mode respectively for 589 and for 569 nm. Here the definition of the saturation intensity is

$$I_{\text{sat}} = (h\nu) / (\sigma\tau), \quad (2)$$

where  $h$  is the Planck constant and  $\nu$ ,  $\sigma$  and  $\tau$  are respectively the frequency, the cross section, and the lifetime of the transition, respectively.

Several topics have to be addressed in order to state that the concept of the PLGS is really able to provide tilt measurements. The most important ones are the following

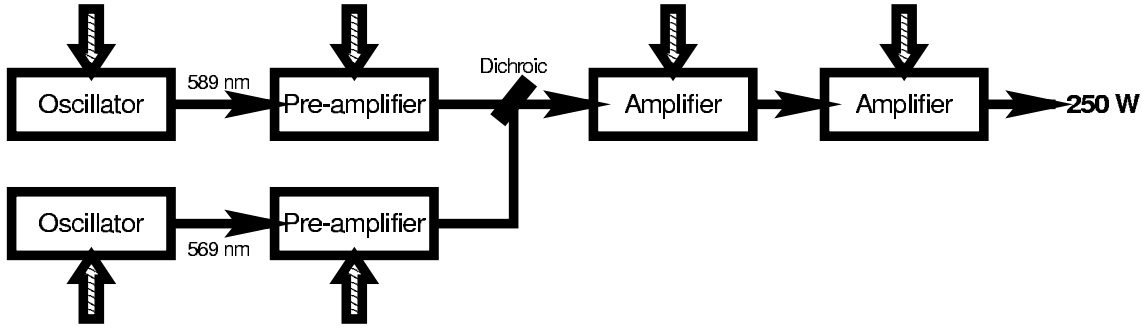
- return flux at 330 nm
- telescope vibrations
- accuracy of the position measurements
- atomic physics model of the sodium atom
- budget link
- R&D of dedicated lasers

The *ELP-OA* programme aims at addressing these topics in order to run a PLGS coupled with the adaptive optics device BOA developed by ONERA<sup>14</sup> at the 1.52m telescope at Observatoire de Haute-Provence (OHP) and to observe long-exposure diffraction limited images without any natural reference source. In the following sections, we will describe results we have obtained by the end of the feasibility study of *ELP-OA* (December 1999).

## 2. RETURN FLUX AT 330NM: THE PASS-2 EXPERIMENT

Since the tilt is derived from a differential measurement, significantly more flux is required to determine the position of the monochromatic components of the PLGS than that of a natural guide star. This is particularly crucial for the 330nm component, which has the maximum weight in the tilt determination because of the steep variation of  $n$  around this wavelength. We had carried out a first experiment<sup>15,16</sup> to measure the return flux at 330nm at the Lawrence Livermore National Laboratory in collaboration with the AVLIS team. It was the *Polychromatic Artificial Star System* experiment (hereafter referred to as PASS-1). The average laser power of the cv lasers used was  $\approx 180$  W for each of the beams locked on the two transitions. The return flux at 330nm was  $\approx 4.5 \cdot 10^5$  photons/s/m<sup>2</sup> for a pulse repetition rate of 4.3 kHz, a pulse FWHM of 50ns and a modulation of 3GHz at 589nm and 1GHz at 569nm. Increasing the repetition rate by a factor of 3 up to 12.9kHz had led to a decrease of the return flux by a factor of 2. Poor weather conditions had prevented us from making measurements at lower powers which are required to fit the observations with atomic physics models. On the other hand, preliminary computations of sodium atom models predicted return fluxes significantly lower than those observed at the LLNL. Thus, we have carried out a second experimental campaign on the sky at the *Commissariat à l'Énergie Atomique* (hereafter referred to as CEA) in collaboration with the SILVA team at its Pierrelatte site. This was the PASS-2 experiment. The run lasted 6 weeks, in October and November of 1999.

An in-depth description and discussion of the PASS-2 experiment is given at this conference by Schöck et al..<sup>17</sup>



**Figure 3.** Schematic of the CEA laser chain used in the PASS-2 experiment.

The laser chain schematic is shown in Fig. 3. Dye lasers are pumped with *ICL 400* cv lasers from CILAS. The parameters of the laser chain are given in Table 1.

Two series of measurements of the return flux at 330nm have been performed with two different oscillators.

**With the SILVA oscillators:** For the first series of measurements we used the SILVA oscillators with different modulation configurations: either no modulation, a single sine modulation (at 180 MHz), or a two-sine modulation (at 180 and 300 MHz) for the 589nm beam and a single sine (at 125 MHz) for the 569nm beam. In both the last cases, the modulation width was  $\approx 0.5$  GHz.

Return fluxes measured are shown in Fig. 4. Let us consider the average power per beam of  $\approx 50$  W. The return flux is  $\approx 30,000$  photons m<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup>. It is consistent with the measurements at the LLNL at 180 W. Indeed since we are at saturation the return flux increases as the intensity, i.e. the return flux at the CEA is expected to be lower by a factor of 3.6. In addition, because of the narrower modulation bandwidth at the CEA, which spans only a part of only the F=2 hyperfine component of the 589nm transition, and taking into account the Rabi frequency, only a third of the velocity classes of the sodium atoms are excited in the  $D_2$  transition. Then, the resulting theoretical ratio of the return flux at the LLNL versus that at the CEA is  $\approx 11$ . Note that the column density of mesospheric sodium may also have been different during these two campaigns.

**Table 1.** Principal characteristics of the laser configuration.

Total power in both colors	10 – 100 W
Ratio of the powers in the two colors	1:1
Pulse repetition rate	5
Beam polarization	linear
Modulation	one modulator, 180 MHz at 589 nm, 125 MHz at 569 nm, or 2 modulators, 180 MHz and 300 MHz, at 589 nm broadened to $\approx 0.5$ GHz
Spectral characteristics	linewidth: 50 MHz spectral jitter: 100 MHz
Pulse shape	triangular
Pulse duration	35 ns at FWHM, 70 ns at the base
Wave front quality	better than $1\lambda$
Beam diameter	$28 \times 34 \text{ mm}^2$
Precision of beam superposition	better than 10% of the diffraction limit

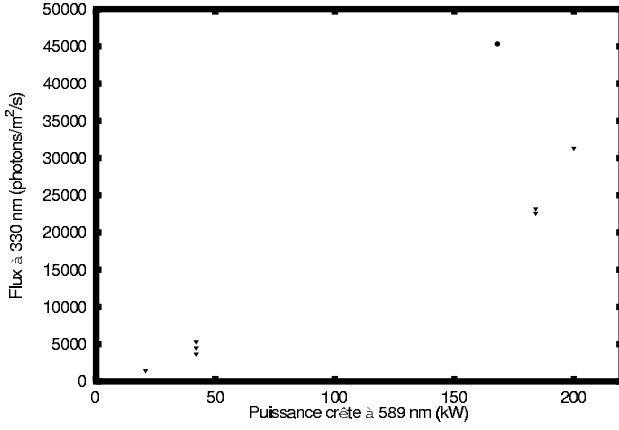
**With the LSP oscillators:** The modulation function of the laser spectral profile looks like a multi Dirac delta function, as long as the Rabi frequency does not fill the gap between the peaks (which would result in a poor efficiency). Then, it is mandatory that modulation functions of both beams are locked on the same radial velocity; if this is not the case, atoms excited by the 589 nm beam to the  $3P_{3/2}$  energy level may be not excited to the  $4D_{5/2}$  level by the 569 nm beam.

Spectral jitter of the lasers causes randomly variable shift of the beam spectral profile. This shift is different for the two beams. The oscillator of the SILVA chain has a spectral jitter width of  $\approx 100$  MHz. It is negligible with respect of the Rabi frequency at the highest peak power we have used: at the average power of 50 W, the Rabi frequency is  $\approx 350$  MHz. But the spectral jitter is much larger than the homogeneous width (respectively 10 and 13 MHz at 589 and 569 nm). Then, at low values of the peak power, it would cause the excitation efficiency to drop significantly. Since we have to decrease the average laser power as much as possible in view of astronomical applications of the PLGS, the spectral jitter is a major concern. It has therefore motivated us to develop at the LSP an oscillator with a spectral jitter significantly lower than the homogeneous width of the transitions.

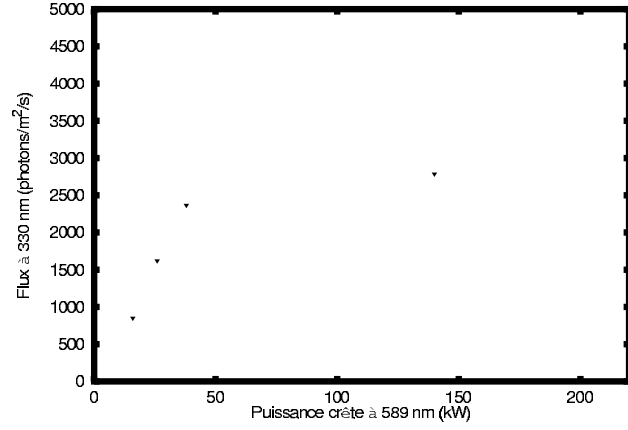
Two possibilities are investigated by the LSP to overcome this problem. One is to develop a “modeless” laser which produces a smooth spectral profile. This development has not reached the point where it can be tested in a two-photon experiment. The second is to develop a jitter-free oscillator which has been used during the PASS-2 experiment where it was amplified with the SILVA chain.

The jitter-free oscillator is built from a cw laser with a dye jet (599-21 Coherent), which is monomode and frequency locked. It is pumped by a YAG cw laser (VERDI/Coherent). Two such oscillators provide us with the two wavelengths at 589 and 569 nm with an accuracy better than 1 MHz. The two beams are then preamplified in two multi-pass devices (developed at the LSP) with gains of up to 10,000. The control of the wavelengths was done with a lambdameter (accuracy  $\lesssim 50$  MHz) and a sodium oven, both developed at the LSP. The sodium oven allowed us to correlate the flux at 330 nm returned from the polychromatic LGS in the mesosphere with the laboratory measurements. This chain has been coupled with the CEA amplifiers to produce a laser beam at 589 and 569 nm launched into the mesosphere with a spectral jitter significantly smaller than the homogeneous width of these lines, i.e. negligible for our application. Because of the lack of time, the modulators and the beam stabilisation devices had not been transferred from the CEA oscillator to the LSP oscillator during this experiment. The rms fluctuation of the beam direction at one wavelength with respect to the other was  $\approx 4$  arcsec; the beams were also superimposed quite poorly (in spite of a large seeing,  $r_0 \approx 5$  cm), which lowered the volume in the mesosphere where the two-photon excitation process could occur. The preliminary results given in Fig. 5 will be corrected for this bias in the final version of the data processing. Then, the effect of the spectral jitter on the efficiency of the process will be quantitatively estimated from the experimental measurements.

In the case of PASS-2, we were able to run two complementary experiments in parallel. The first one, conducted by the Galway team, had the purpose of measuring the sodium column density. Two instruments have been installed at the focus of a 30 cm telescope located 65 m from the launch telescope



**Figure 4.** Return flux at 330 nm as a function of the laser peak power at 589 nm. These measurements were taken using the CEA oscillator. The values shown apply to an atmospheric and instrument transmission of unity.



**Figure 5.** Return flux at 330 nm as a function of the laser peak power at 589 nm. These measurements were taken using the the low-jitter oscillator of the LSP without frequency modulation. The values shown apply to an atmospheric and instrument transmission of unity.

- a LIDAR-like system (based on an APD and a boxcar), measuring the backscattered intensity as a function of time; it was synchronized with the laser pulses. Its purpose was in particular to correlate, if possible, time variations in the column density with sporadics, which have generally a vertical profile narrower than the mesospheric sodium layer.
- a CCD camera, taking images of the backscattering beam in the mesosphere, with a lower spatial resolution than the APD.

Data acquired with these instruments will allow us to know the column density, which is an important parameter in the models. Data are currently being processed.

The second experiment is a *Generalized Seeing Monitor*<sup>18</sup> (hereafter referred to as GSM) which was loaned by the *Université de Nice-Sophia-Antipolis*, of which the purpose was to provide measurements of Fried's parameter,  $r_0$  simultaneously with the return flux measurements. Then, the laser spot area in the mesosphere can be determined and consequently the intensity, which is another critical parameter in the models. The seeing conditions were quite poor, as expected during the fall in France. On average, we found  $r_0 \approx 4$  cm. The GSM has also provided us with a monitoring of the atmosphere transmission, allowing us to correct the measured return fluxes for variations in this parameter. The conditions either of seeing or of transmission were acceptable only during 4 nights .

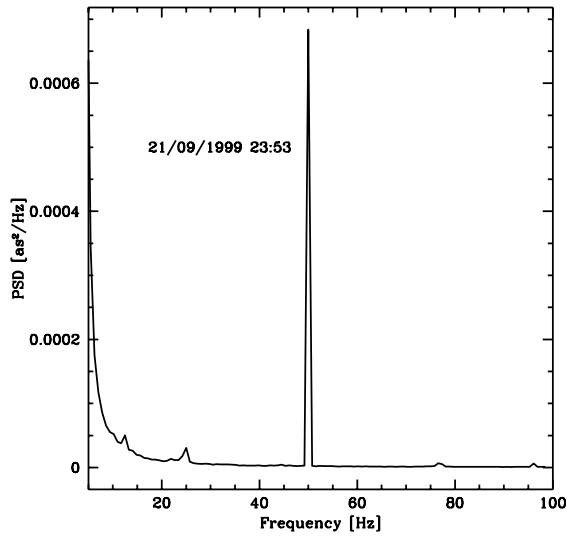
### 3. TELESCOPE VIBRATIONS: THE PENDULAR SEISMOMETER

Since the concept of the PLGS relies on the wavefront propagation of the chromatic gradient of the refractive index of air, it does not permit us to correct for the mechanical causes of the image wandering at the telescope focus such as telescope vibrations. Such vibrations are not negligible when compared with the telescope diffraction limit.<sup>19–22</sup> At  $H_\alpha$  and an 8 m telescope, an acceptable rms mechanical tilt of 7.0 marcsec degrades the Strehl ratio by a factor of 0.8. Assuming monochromatic sinusoidal vibrations at 1 Hz, the angular acceleration is  $1.8 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ , and the linear acceleration is  $7 \cdot 10^{-7} \text{ g}$  ( $7 \cdot 10^{-9} \text{ g}$  at 0.1 Hz).

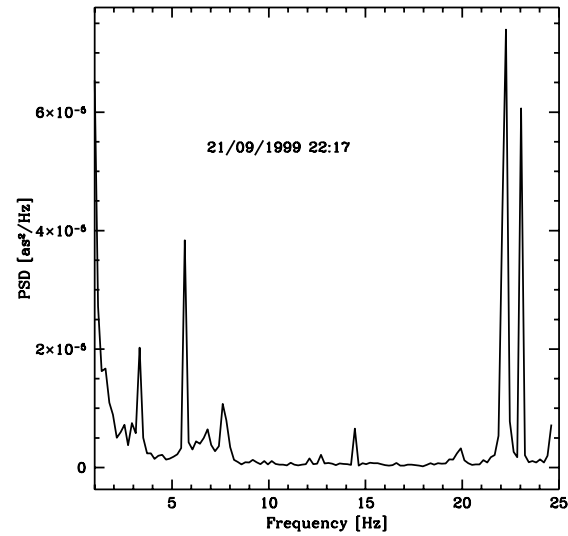
Laser gyroscopes<sup>23</sup> have performances which are not adequate, including the best ones developed at ESO and tested at the NTT.<sup>24</sup> Accelerometers have been used, for instance at ESO, to measure telescope vibrations.<sup>25,26</sup> The best accelerometer resolution is  $\approx 10^{-6} \text{ g}$ , which provides the adequate sensitivity only in the high frequency domain.

Hence, a special instrument has been conceived and built at Lyon Observatory to span the frequency range 0.1– $\approx 30$  Hz. It is a new kind of seismometer, a pendular seismometer.<sup>27</sup> It is described in more detail in another paper at this conference.<sup>28</sup> While seismometers used in geophysical studies sense either horizontal or vertical translations,

the pendular seismometer senses angles. The principle is the following: a mass (a 1 kg 40 cm long arm of aluminum) is suspended at its center of gravity. Variations in the direction of the telescope axis are measured from the rotation of the arm with respect to the support of the seismometer, which is fixed to the telescope. The axis consists of two 'X' type flexible pivots. The arm has only one degree of freedom, so that two such seismometers are required to measure vibrations along the two telescopes axes. Two linear motors (LVDT) in opposite phase at each end of the arm servo its position with the tension applied providing the angular motion measurement. After filtering of two components of the power spectrum at 5 kHz and 650 Hz, the measured rms noise of the pendular seismometer is 3 marcsec in the 0-25 Hz band: this prototype already matches the specifications for diffraction-limited imaging at 8-10 m class telescopes.



**Figure 6.** Vibrations at the Observatoire de Haute-Provence 1.52m telescope, right ascension axis, telescope tracking on, dome open. Data sampling: 200 Hz. The low frequency domain of the power spectrum is not displayed, because it is much higher than higher frequencies due to the atmospheric tilt. The 6 mas amplitude peak at 50 Hz is due to an electronic parasite. The amplitude of the peak at 76 Hz is lower than 2 marcsec.



**Figure 7.** Vibrations at the Observatoire de Haute-Provence 1.52m telescope, declination axis, telescope tracking on, dome open.

The goal of the next step of the ELP-OA project is to observe long exposure diffraction limited images at the OHP 1.52m telescope. We have measured the vibration properties of this telescope with the pendular seismometer. Figure 6 and 7 show that they lie within the range of the usual tip-tilt mirror specifications.



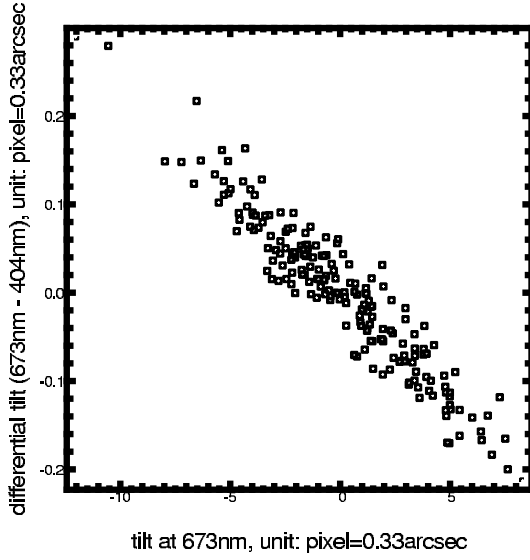
#### 4. ACCURACY OF MEASUREMENTS: THE MATILD EXPERIMENT

The differential tilt is  $\approx \frac{1}{20}$  of the tilt, from Eq. 1. Thus, measuring the tilt at an accuracy of a fraction of the Airy disk from the differential tilt requires accuracies ranging around 1mas. Since this is not trivial, we have carried out the MaTiD experiment.<sup>29</sup> It aims at testing whether this accuracy is achievable in conditions as realistic as possible. A multi-wavelength (from 300 to 673nm) point source is generated and the beams are propagated horizontally over  $\approx 100$  m at an altitude varying from 3 to 16m above the ground at night time. Data have first been simulated to evaluate the sources of noise and bias (photon noise, speckle noise, dark current, readout noise, slight overlapping of the monochromatic images). Figure 8 shows the correlation between the tilt and the tilt mesured from the differential tilt over a limited spectral basis, obtained from simulated data including all the identified sources of noise.

The gain in the rms error in the measurement of the image positions with respect to the center of gravity method is huge at moderate flux per frame, according to these first estimates.

flux (counts)	$10^4$	$10^5$	$10^6$
number of simulations	100	100	500
RMS differential tilt error (pixels)			
centroid	0.311	0.0397	0.0103
$N_{\text{basis}} = 3$	0.033	0.0062	0.0055
$N_{\text{basis}} = 4$	0.032	0.0061	0.0053
$N_{\text{basis}} = 5$	0.034	0.0057	0.0049
$N_{\text{basis}} = 6$	0.037	0.0054	0.0047
$N_{\text{basis}} = 7$	0.042	0.0056	0.0047
$N_{\text{basis}} = 8$	0.046	0.0047	0.0044
$N_{\text{basis}} = 9$	0.050	0.0052	0.0044

**Table 2.** Precision for the measured differential tilt by different methods: the center of gravity method (first line named “centroid”) and the fit of a phase screen model (following lines)



**Figure 8.** Correlation between differential tilt (673nm-404nm) and tilt (at 673nm). This correlation is obtained by using 200 simulations of MaTiD-like images, including all the noise sources previously studied.

A phase mapping algorithm has been written to measure the differential tilt. The model  $m_{\mathbf{x}}$  assumes that the data  $d_{\mathbf{x}}$  are the superposition of the monochromatic components of the image of the polychromatic LGS

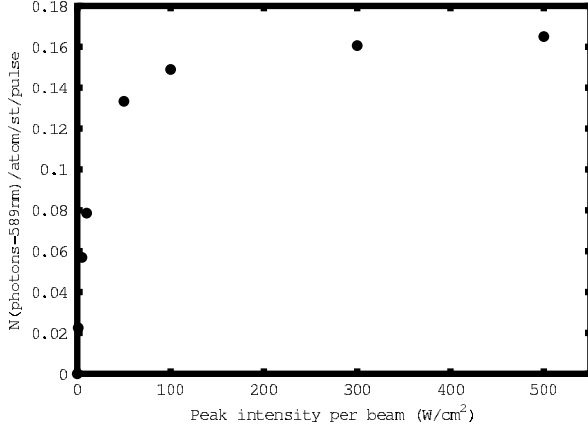
$$m_{\mathbf{x}} = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} |a_{\lambda, \mathbf{x}}|^2 \quad (3)$$

where  $\alpha_{\lambda}$  is the intensity at the position  $\mathbf{x}$  of the component at  $\lambda$  and  $Absa_{\lambda, \mathbf{x}}^2$  is the complex amplitude in the image plane. The game of the algorithm is to minimize the likelihood term  $L(\mathbf{d}|\mathbf{m})$  of the data with respect to the model

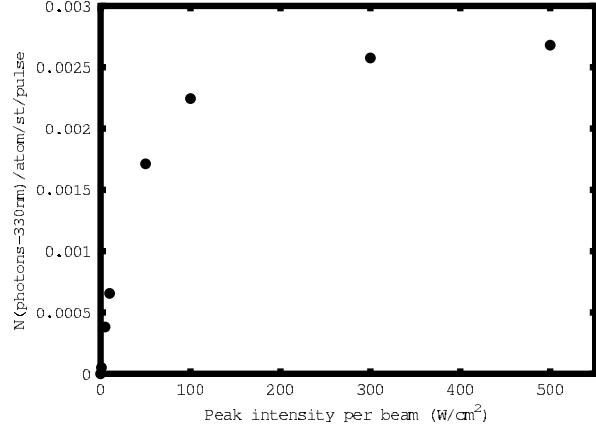
$$L(\mathbf{d}|\mathbf{m}) = \sum_{\mathbf{x}} w_{\mathbf{x}} [d_{\mathbf{x}} - m_{\mathbf{x}}]^2 \quad \text{with} \quad w_{\mathbf{x}} = \begin{cases} 1/\text{Var}(d_{\mathbf{x}}) & \text{where data is available} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (4)$$

One expands the phase in the pupil onto a finite basis,  $N_{\text{basis}}$ , of functions  $b_{k, \lambda, \mathbf{u}}$  such as the tilt is expended only on the two first terms.

$$\varphi_{\lambda, \mathbf{u}} = \beta_{\lambda} \sum_{k=1}^{N_{\text{basis}}} c_{k, \lambda} b_{k, \lambda, \mathbf{u}} \quad (5)$$



**Figure 9.** Predicted return flux at 589 nm versus the peak power per beam.



**Figure 10.** Predicted return flux at 330 nm versus the peak power per beam.

where  $\beta_\lambda \propto (n_\lambda - 1)/\lambda$ ; therefore the coefficients of the expansion,  $c_{k,\lambda}$ , are identical but the two first ones, which have to be determined. The first estimates of the accuracy obtained with this algorithm in the determination of the position of the monochromatic components in the images is very encouraging (see Table 2). The rms error is smaller than that obtained with the center of gravity algorithm by a factor 3 to 10 from  $10^6$  to  $10^4$  photons per image.

## 5. SODIUM ATOM MODELS: BACON CODE AND KINETICS EQUATION MODEL

The code *Bacon* has been developed for the polychromatic laser guide star project. The aim of this code is the optimization of the fluorescence photon flux (at 330 nm) as a function of the laser excitation parameters (fluence, pulse duration, phase modulation parameters, etc.). A density matrix formalism has been used to solve the 48 equations of the two-step excitation process of the sodium atom considering the following energy levels:  $S_{3/2} : F \in [1, 2]$ ;  $3P_{3/2} : F \in [0, 3]$ ;  $4D_{5/2} : F \in [1, 4]$ ;  $4P_{3/2} : F \in [0, 3]$ ; and  $4S_{3/2} : F \in [1, 2]$ ; and for each  $F, M_F \in [-F, F]$ . The  $4D_{3/2}$  level has been neglected in the excitation ladder. The Doppler line profiles have been divided into several classes and the equations are solved for each class. The laser fields can be monomode or phase-modulated with different temporal shapes and different light polarizations. At the end, the populations of the considered levels and the number of photons emitted at 589, 569 and 330 nm are given as output. Results of this code have been compared, for validation, with those of Morris<sup>30</sup> for a one-step excitation and with experiments. Predicted return fluxes at 330 and 589 nm are shown in Figs. 10 and 9. At the average power  $\langle P \rangle = 55$  W and with a single-sine modulation, the intensity at Pierrelatte was  $\approx 9$  W cm<sup>-2</sup>. Then, according to the figures the absorption at the sodium layer was saturated. Given an average laser power, a lower peak power and a higher pulse repetition rate would therefore lead to higher return fluxes.

Because of the relatively large number of sub-levels taken into account in the density matrix code, of the modulation function, and of the sampling of the line profiles (typically 100 points per line), computation times for a single parameter configuration are large (several hours on a parallel computer). We have therefore developed a much faster code; it is based on the following kinetics equations:

$$\frac{dN_1}{dt} = -I_1 \frac{N_1 - N_2}{\tau_{2-1}} - \left[ I_1 I_2 (N_1 - N_3) \left( \frac{1}{\tau_{2-1}} + \frac{1}{\tau_{3-2}} \right) \right] + \frac{N_2}{\tau_{2-1}} + \frac{N_4}{\tau_{4-1}} + \frac{N_6}{\tau_{6-1}} \quad (6)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -I_1 \frac{N_1 - N_2}{\tau_{2-1}} - \frac{N_2}{\tau_{2-1}} - I_2 \frac{N_2 - N_3}{\tau_{3-2}} + \frac{N_3}{\tau_{3-1}} + \frac{N_5}{\tau_{5-2}} \quad (7)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = -I_2 \frac{N_2 - N_3}{\tau_{3-2}} - \left[ I_1 I_2 (N_1 - N_3) \left( \frac{1}{\tau_{2-1}} + \frac{1}{\tau_{3-2}} \right) \right] - \frac{N_3}{\tau_{3-2}} - \frac{N_3}{\tau_{3-4}} \quad (8)$$

$$\frac{dN_4}{dt} = \frac{N_3}{\tau_{3-4}} - \frac{N_4}{\tau_{4-1}} - \frac{N_4}{\tau_{4-5}} \quad (9)$$

$$\frac{dN_5}{dt} = \frac{N_4}{\tau_{4-5}} - \frac{N_5}{\tau_{5-2}} - \frac{N_5}{\tau_{5-6}} \quad (10)$$

$$\frac{dN_6}{dt} = \frac{N_6}{\tau_{5-6}} - \frac{N_6}{\tau_{6-1}} \quad (11)$$

where the non-resonant terms are designed between the square brackets in Eqs.6 and 8. We have calibrated these kinetics equations code by means of the Bacon code.

## 6. BUDGET LINK

The end-to-end model of the polychromatic LGS process is detailed in Schöck et al.<sup>17</sup> The purpose of this model is to estimate the Strehl ratio of long exposure images as a function of the observation wavelength,  $r_0$ , the wavefront coherence time  $\tau_0$ , and the laser power.

The Strehl ratio due to the tilt writes as<sup>31</sup>

$$S_{tilt} = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{2}(\sigma_{ph}^2 + \sigma_{bw}^2)\left(\frac{D}{\lambda_c}\right)^2}, \quad (12)$$

where  $\sigma_{ph}$  and  $\sigma_{bw}$  stand for the photon noise standard deviation and for the bandwidth error respectively, where  $\lambda_c$  is the observation wavelength, and where  $D$  is the diameter of the telescope under consideration. Photon noise is expressed as

$$\sigma_{ph}^2 = \left(\frac{n-1}{\Delta n}\right)^2 \frac{\sigma_{spot}^2}{\eta \Phi A_r t_i}, \quad (13)$$

where  $\sigma_{spot}$  is the half-width at  $1/e$  of the LGS spot image on the detector,  $\eta$  is the global efficiency taking into account the atmosphere transmission, the transmission of the whole optics, and the detector quantum efficiency,  $\Phi$  is the flux of photons per square meter per second at the ground (assuming no absorption and  $\eta = 1$ ),  $A_r$  is the area of the receiving telescope, and  $t_i$  is the integration time.

The temporal bandwidth variance is<sup>32</sup>

$$\sigma_{bw}^2 = (f_T/f_{3dB})^2(\lambda/D)^2 \quad (14)$$

where  $f_T$  is the tilt coherence frequency, equivalent to the Greenwood frequency which accounts for all the modes

$$f_T = 0.331D^{-1/6}\lambda_c^{-1}\sec^{-1/2}\theta \left[ \int dh C_n^2(h)V(h)^2 \right]^{-1/2}. \quad (15)$$

Here,  $\theta$  is the zenith angle,  $C_n^2(h)$  is the turbulence structure constant as a function of altitude,  $h$ , and  $V(h)$  is the wind velocity.  $f_{3dB}$  is the temporal 3dB frequency of the correction system under the assumption that the transfer function of the system is given by

$$H(f) = \frac{1}{1 + if/f_{3dB}}. \quad (16)$$

The integration time and the bandwidth of the system are then related by<sup>33</sup>

$$f_{3dB} = 12^{1/4} \cdot (2\pi t_i)^{-1}. \quad (17)$$

Then we get

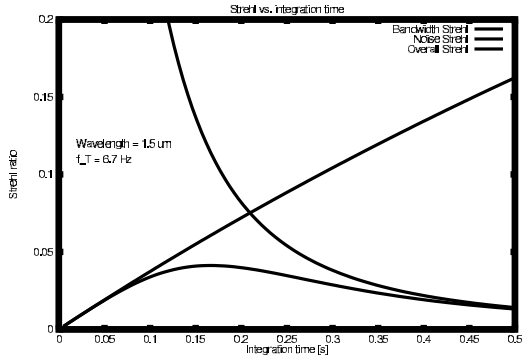
$$\frac{S_{tilt} = 1}{1 + a/t_i + bt_i^2}, \quad (18)$$

where  $a \propto \lambda_c^{-2}$  and  $b \propto f_T^2(0.5\mu\text{m})\lambda_c^{-2}$ . The best integration time, that is the integration time for which the maximum Strehl ratio is obtained, is then given by

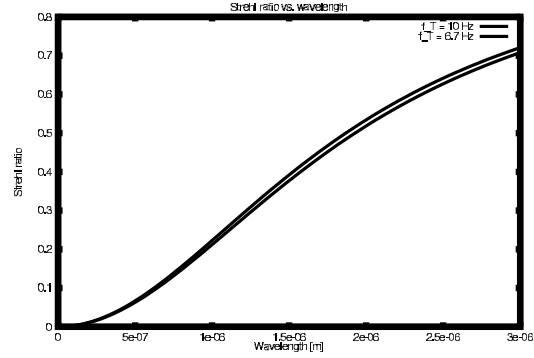
$$t_i = \left(\frac{a}{2b}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (19)$$

It is worthwhile noting that *the best integration time is not dependent on the observation wavelength*. Typical values range between 30 and 150 ms.

Figures 11 and 12 show an example of the variation of the tilt-limited Strehl respectively versus the integration time and versus the observation wavelength for parameters typical of OHP. With these conservative parameters, a provisional estimate of the tilt-limited Strehl ratio is higher than 50% at  $2.2\ \mu\text{m}$ , and  $\approx 8\%$  at  $550\text{ nm}$  in the visible. It assumes that the phase mapping method is used to measure the differential tilt.



**Figure 11.** Strehl versus integration time for the case  $f_T = 6.7\text{ Hz}$  and  $\lambda_c = 1.5\ \mu\text{m}$  at Observatoire de Haute-Provence.



**Figure 12.** Strehl versus wavelength,  $\lambda_c$ , for the two cases of  $f_T = 10\text{ Hz}$  and  $f_T = 6.7\text{ Hz}$  and Observatoire de Haute-Provence typical parameters.

## 7. CONCLUSIONS

We have described the successful achievement of critical tasks of the feasibility study of the ELP-OA programme. This first phase of the ELP-OA has been completed at the end of 1999. The following forthcoming improvements in the budget link are expected

- **good seeing site.** Considering  $r_0 \approx 20\text{ cm}$  increases  $f_T$  significantly and consequently the integration time for tilt measurements.
- **larger launch telescope.** Launching the beam with a larger telescope, assuming it is diffraction limited, leads to a smaller spot size in the mesosphere, and consequently to a smaller contribution of the photon noise to the Strehl degradation, assuming a fixed average laser power.
- **cw lasers.** Using cw lasers or lasers pulsed at high pulse repetition frequency should be preferred, because it will allow us not to saturate the coherent two-photon absorption in the mesosphere.
- **phase screen mapping.** Improving the accuracy of the differential tilt measurement is possible with the phase mapping algorithm.<sup>29</sup>

These improvements will lead either to improve the Strehl ratio for a given laser power, or reversely to decrease the laser power for a given the Strehl ratio.

The next step of the ELP-OA programme is to set up an experiment at the  $1.52\text{ m}$  telescope of Observatoire de Haute Provence (Southern France) where an adaptive optics system will be fed with a polychromatic laser guide star in order to obtain long-exposure diffraction-limited images without any natural guide star. The whole experiment will be optimized in order to decrease the average laser power if possible to  $2 \times 25\text{ W}$ . The oscillators, possibly reduced to a single device, will be pumped with a CuHBr laser,<sup>34,35</sup> both developed at the LSP. The adaptive optics bench will be the BOA device developed at ONERA.<sup>14</sup> The expected time for this second phase of the ELP-OA programme is three years.

### acknowledgements

The ELP-OA is funded by the French *Ministère de la Recherche* (Contract number 98 B 0001) and *Ministère de la Défense* (Contract 95 304 00012DSP), by the *Région Rhône-Alpes* (Contract L14840.00.00/97018030), by the CNRS (programmes ULTIMATECH and PNHRAA) and by the Université Claude Bernard Lyon-1 and Université Joseph Fourier at Grenoble. We thank L. Letoullec for having leaded the functional analysis of the programme. We are indebted to the staff of the mechanical and electronics shops of Lyon Observatory and of the mechanical shop of Laboratoire de Spectrométrie Physique at Grenoble. We thank P. Rabou at Laboratoire d'Astrophysique de Grenoble for optics computations. We also express our thanks to the staff of the CEA/DCC/DPE who welcomed the PASS-2 experiment at Pierrelatte. All of these people played a major role in the success of the feasibility study of ELP-OA. N.A., H.F., C.H. and M.S. benefit from a postdoc grant from the Laser Guide Star TMR European contract number ERBFMRX-CT96-0094. RF particularly thanks all his colleagues from the LGS TMR network and the European Commission for its support

### REFERENCES

1. H. W. Babcock, "The possibility of compensating astronomical seeing," *Pub. Astron. Soc. Pacific* **65**, p. 229, 1953.
2. M. Le Louarn, R. Foy, N. Hubin, and M. Tallon, "Laser guide star for 3.6m and 8m telescopes: Performances and astrophysical implications," *Mon. Not. R. astron. Soc* **295**, pp. 756–768, 1998.
3. R. Foy and A. Labeyrie, "Feasibility of adaptive telescope with laser probe," *Astron. Astrophys.* **152**, pp. L29–32, 1985.
4. J. Pilkington, "Artificial guide stars for adaptive imaging," *Nature* **330**, p. 116, 1987.
5. R. Davies, W. Hackenberg, T. Ott, A. Eckart, S. Rabien, S. Anders, S. Hippler, M. Kasper, P. Kalas, A. Quirrenbach, and A. Glindemann, "The science potential of ALFA: Adaptive optics with natural and laser guide stars," *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **138**, pp. 345–353, 1999.
6. S. S. Olivier, D. T. Gavel, H. W. Friedman, C. E. Max, J. R. An, K. Avicola, B. Bauman, J. M. Brase, E. Campbell, C. Carrano, J. Cooke, G. Freeze, E. Gates, V. Kanz, K. T. C, B. Macintosh, M. Newman, E. Pierce, K. Waltjen, and J. Watson, "Improved performances of the laser guide star adaptive optics at lick observatory," in *Adaptive optics systems and technology*, R. K. Tyson and R. Q. Fugate, eds., vol. 3762 of *Proc. SPIE*, 1999.
7. J. Sebag, C. d'Orgeville, M. Chun, J. Filhaber, J. Oschmann, F. Rigaut, and D. Simons, "Lick sodium laser guide star: performance during 1998 lgs observing campaign," in *Adaptive optics systems and technology*, R. K. Tyson and R. Q. Fugate, eds., vol. 3762 of *Proc. SPIE*, 1999.
8. F. Rigaut and E. Gendron, "Laser guide star in adaptive optics: the tilt determination problem," *Astron. Astrophys.* **261**, pp. 677–684, 1992.
9. S. Olivier, C. Max, D. T. Gavel, and M. J. Brase, "Tip-tilt compensation - resolution limits for ground-based telescopes using laser guide star adaptive optics," *Astrophys. J.* **407**, pp. 428–439, 1993.
10. R. Ragazzoni, "Robust tilt determination from laser guide star using a combination of different techniques," *Astron. Astrophys.* **319**, pp. L9–L12, 1997.
11. M. Belenkii, S. J. Karis, J. M. B. II, and R. Q. Fugate, "Experimental validation of a technique to measure tilt from a laser guide star," *Opt. Lett.* **24**, pp. 637–639, 1999.
12. R. Foy, Y. Boucher, B. Fleury, G. Grynberg, P. R. McCullough, A. Migus, and M. Tallon, "ATLAS status report and tilt sensing using multicolour laser reference star," in *Progress in telescope and instrumentation technologies*, U. M.-H., ed., no. 42 in ESO conferences, pp. 437–441, ESO, (Garching, Germany), 1992.
13. R. Foy, A. Migus, F. Biraben, G. Grynberg, P. R. McCullough, and M. Tallon, "The polychromatic artificial sodium star: a new concept for correcting the atmospheric tilt," *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **111**, pp. 569–578, 1995.
14. P.-Y. Madec, D. Rabaud, B. Fleury, J.-M. Conan, L. Rousset-Rouvière, F. Mendez, J. Montri, V. Michau, G. Rousset, and M. Séchaud, "Essais du banc d'optique adaptative ONERA à l'OHP," *La Lettre de l'OHP* **16**, pp. 2–3, 1997.
15. R. Foy, M. Tallon, H. Friedman, A. Baranne, F. Biraben, G. Grynberg, M. L. Louarn, A. Petit, J.-M. Weulersse, A. Migus, and J.-P. Gex, "Polychromatic guide star," in *High-Power Laser Ablation 1998*, C. Phipps, ed., vol. 3343 of *Proc. SPIE*, pp. 194–204, 1998.

16. R. Foy, M. Tallon, E. Thiébaud, J. Vaillant, F.-C. Foy, D. Robert, H. Friedman, F. Biraben, G. Grynberg, J.-P. Gex, A. Mens, A. Migus, J.-M. Weulersse, and D. J. Butler, "Observation of a polychromatic laser guide star," *J. Opt. Soc. Am. A* **submitted**, 2000.
17. M. Schöck, R. Foy, J.-P. Pique, P. Chevrou, N. Ageorges, A. Petit, V. Bellanger, H. Few, F.-C. Foy, C. Högemann, M. Laubscher, O. Peillet, P. Segonds, M. Tallon, and J.-M. Weulersse, "PASS-2: Quantitative photometric measurements of the polychromatic laser guide star," in *Adaptive Optical Systems Technology*, vol. 4007 of *Proc. SPIE*, 2000.
18. J. Vernin and M. Azouit, "Traitement d'image adapté au speckle atmosphérique. II. Analyse multidimensionnelle appliquée au diagnostic à distance de la turbulence," *J. Optics (Paris)* **14**, pp. 131–142, 1983.
19. R. Foy, I. Belkine, and E. Thiébaud, "Pre-main sequence stars by visible speckle interferometry at the CFHT and telescope/instrument constraints," in *Proc. of the CFHT Users's meeting*, M. Azzopardi, ed., 4, pp. 119–123, (Waimea, Hawaii), 1995.
20. E. Thiébaud, Y. Balega, I. Balega, I. Belkine, J. Bouvier, R. Foy, A. Blazit, and D. Bonneau, "Orbital motion of DF Tauri from speckle interferometry," *Astron. Astrophys. Lett.* **304**, pp. L17–L20, 1995.
21. E. J. Kibblewhite and M. R. Chun, "Design of tip-tilt and adaptive optics servos using measured angle-of-arrival and phase power spectra," in *Adaptive Optical System Technologies*, D. Bonaccini and R. K. Tyson, eds., vol. 3353 of *Proc. SPIE*, pp. 522–530, 1998.
22. S. Altarac, P. Berlioz-Arthaud, E. Thiébaud, and R. Foy, "Effect of telescope vibrations upon high angular resolution imaging," *in preparation*, 2000.
23. W. W. Chow, J. Gea-Banacloche, L. M. Pedrotti, V. E. Sanders, W. Schleich, and M. O. Scully, "The ring laser gyro," *Rev. Modern Phys.* **57**, pp. 61–104, 1985.
24. H. Dahlman, B. Huber, and W. Schröder, "Optical gyro encoder tested on the NTT," *The Messenger* **74**, pp. 5–6, 1993.
25. P. Bourlon, T. Ducros, and M. Faucherre, "Results of vibrations measurements on La Silla," in *High-resolution imaging by interferometry II*, J. M. Beckers and F. Merkle, eds., ESO Conferences, pp. 1215–1225, ESO, (Garching, Germany), 1991.
26. B. Koehler, "VLT unit telescope suitability for interferometry: first results from acceptance tests on subsystems," in *SPIE*, 3350, 1998.
27. A. A. Tokovinin, "Pendular seismometer for compensating telescope vibrations," *Mon. Not. R. astron. Soc* **in press**, 2000.
28. A. A. Tokovinin, "Pendular seismometer for correcting telescope pointing errors," in *Adaptive Optical Systems Technology*, vol. 4007 of *Proc. SPIE*, 2000.
29. J. Vaillant, É. Thiébaud, and M. Tallon, "ELPOA: Data processing of chromatic differences of the tilt measured with a polychromatic laser guide star," in *Adaptive Optical Systems Technology*, vol. 4007 of *Proc. SPIE*, 2000.
30. J. Morris, "Efficient excitation of a mesospheric sodium laser guide star by intermediate-duration pulses," *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, pp. 832–845, 1994.
31. D. G. Sandler, S. Stahl, J. Angel, M. Lloyd-Hart, and D. McCarthy, "Adaptive optics for diffraction-limited infrared imaging with 8-m telescopes," *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, pp. 925–945, 1994.
32. G. A. Tyler, "Bandwidth considerations for tracking through turbulence with 8-m telescopes," *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, pp. 358–367, 1994.
33. R. R. Parenti and R. J. Sasiela, "Laser-guide-star systems for astronomical applications," *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, pp. 288–309, 1994.
34. P. Coutance, G. Naylor, and J.-P. Pique, "A copper "hybrid" laser of high beam quality using an axial unstable cavity," *IEEE J. Quantum Electron.* **31**, pp. 1747–1752, 1995.
35. P. Coutance and J.-P. Pique, "Radial and time resolved measurement of cuprous bromide concentration in a Cu/HBr laser," *IEEE J. Quantum Electron.*, 1998.

### **8.3 Article publié dans « Journal of Optical Society of America, 2000, Volume 17»**

## Photometric observations of a polychromatic laser guide star

Renaud Foy, Michel Tallon, Isabelle Tallon-Bosc, Eric Thiébaud, Jérôme Vaillant,  
Françoise-Claude Foy and Daniel Robert

*CRAL/Observatoire de Lyon, CNRS UMR 5574, 69561 Saint-Genis-Laval cedex, France*

Herb Friedman

*Lawrence Livermore National Laboratory, P.O. Box 808, Livermore, Ca 94550, USA*

François Biraben and Gilbert Grynberg

*Ecole Normale Supérieure, CNRS UMR 8552, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France*

Jean-Pierre Gex

*CRITT-CCST, Les Algorithmes - Bt Euclide, 91194 Saint-Aubin France*

Alain Mens

*CEA, Limeil-Brevannes, France*

Arnold Migus

*LULI/Ecole Polytechnique, CNRS/CEA UMR 7605, 91128 Palaiseau, France*

Jean-Marc Weulersse

*CEA/DCC, Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France*

David J. Butler

*Department of Physics, National University of Ireland, Galway, Ireland*

We report the photometric observation of a polychromatic laser guide star (PLGS) using the AVLIS laser at the Lawrence Livermore National Laboratory. The process aims at providing a measurement of the tilt of the incoming wavefront at a telescope induced by atmospheric turbulence. It relies on the two-photon coherent excitation of the  $4D_{5/2}$  energy level of sodium atoms in the mesosphere. We used two laser beams at 589 and 569 nm, with a maximum total average output power of  $\approx 350$  W. For the purpose of photometric calibration, a natural star was observed simultaneously through the same instrument as the PLGS at the focus of the LLNL 50 cm telescope. Photometric measurements of the 330 nm return flux confirm our previous theoretical studies that the PLGS process should allow us at a later stage to correct for the tilt at wavelengths as short as  $\approx 1\mu\text{m}$  at good astronomical sites. They show also that, at saturation of two-photon coherent absorption in the mesosphere, the backscattered flux increases by a factor of  $\approx 2$  when the pulse repetition rate decreases by a factor of 3 at constant average power. This unexpected behaviour is briefly discussed.

### 1. Introduction

Adaptive optics (AO) at large telescopes aims at providing diffraction limited images by correcting the incoming wavefronts for atmospheric phase disturbances. AO requires bright reference sources within the isoplanatic patch of the programme object, which are by far too scarce. The laser guide star<sup>1</sup> (LGS) provides such a source. However, due to the inverse return of light, a monochromatic LGS cannot sense the wavefront tilt; this principle prevents us from using only a monochromatic LGS for high resolution long exposure imaging. The polychromatic LGS<sup>2</sup> stimulates a non-linear emission mechanism over a wide spectral range from a single spatial spot. Due to chromatic variations of air refractive index, the direction of the LGS components depends on the wavelength. These differences allow us to restore the tilt. We have experimented with the AVLIS laser to achieve a coherent two-photons excitation of the



$4D_{5/2}$  level of mesospheric sodium atoms. We have detected the 330 nm and the 589.6nm decay emissions. The UV flux is consistent with long exposure imaging in the red-near infrared if the LGS components are observed with an AO device.

The laser guide star concept has proven it can provide the reference source to feed the wavefront sensor of an AO device<sup>3-6</sup>, allowing the system to produce images close to the telescope diffraction limit. Nevertheless exposure times were short with respect to the coherence time of the atmosphere for the tilt  $\theta$ . The round trip time of the light from the ground to the backscattering atmospheric layer ( $\approx 600\mu\text{s}$  in the case of the mesospheric sodium layer) is much shorter than the tilt coherence time, which is typically a few tens of ms in the visible range. Then the atmosphere equally deflects the beam on the ways to and from the backscattering layer and prevents the measurement of the tilt<sup>7,8</sup>. The tilt is then measured from a natural guide star lying within the tilt isoplanatic domain of the programme object<sup>9,10</sup>. The lack of natural guide star bright enough to measure the tilt results in the rather poor sky coverage of LGS-fed AO devices<sup>11,12</sup>, especially in the visible or near infrared range.

Several methods have been proposed to extract tilt from the LGS: creating a polychromatic LGS<sup>13,2</sup>, observing the laser beam from auxiliary telescopes<sup>14,15</sup>, shooting from distant auxiliary telescopes<sup>16</sup> and using the small time-lag between the upward and the downward laser beams<sup>17</sup>. Methods using auxiliary telescopes require complex logistics but the PLGS is the simplest if the laser power required is not too high. Here we describe the first experiment to produce a polychromatic LGS on the sky to confirm the theoretical feasibility study<sup>2</sup> of this concept. We report the observation of a LGS at 330nm originating from the fluorescence of mesospheric sodium atoms excited by a two-photon absorption. The purpose of this experiment was to study the photometric efficiency of the two-photon coherent absorption in the mesosphere. From the measured returned flux, the PLGS should allow us at a later stage to measure the tilt down to the red in good astronomical sites and observe it through an AO system.

Let us recall the principle of the PLGS. If a laser beam is able to excite a process radiating a spectrum spanning a wide range ( $\Delta\lambda$ ), then the backscattered light will undergo different deflections depending on the wavelength: it is the differential tilt  $\delta\theta$ , which is proportional to the tilt<sup>2</sup>:

$$\theta = \delta\theta \times (n - 1)/\delta n; \quad (1)$$

$n$  stands for the air refractive index, and  $\delta n$  for the variation of  $n$  over  $\Delta\lambda$ . The sensitivity of the process is larger when using lines in the ultraviolet where the refractive index gradient is much steeper. Taking into account transition cross sections and abundances the most efficient predicted process is the two-photon excitation of the  $4D_{5/2}$  energy level of mesospheric sodium atoms. This level decays to the ground level through several lines from 330 nm to  $2.3\mu\text{m}$ . By chance the shortest wavelength is 330 nm, close to the best trade-off with the atmospheric transmission cut-off due to ozone absorption. For this large wavelength interval, we have  $(n - 1)/\delta n \approx 20$ . Thus, the variance of the error in the differential tilt measurement has to be 20 times smaller than the allowed variance in the tilt itself. This strong requirement justifies the PASS experiment to check that the return flux is high enough to fulfill it.

We have built PASS, a dedicated instrument to form two separate images on the detector at the wavelengths  $D_1$  (rejecting  $D_2$ ) and 330nm. In addition we simultaneously observed a natural star, for the purpose of photometric calibration. To decrease the light pollution from the natural star onto the LGS in case both are superimposed, both the UV and the orange domains are dispersed. The image in the other colours is not dispersed. The optical layout of PASS is described in Fig. 1. PASS has been installed at the Cassegrain focus of the 50 cm telescope at the LLNL. The optical efficiency, including the 2 telescope mirrors, is 0.06 at 589nm, and only 0.035 at 330nm due to a dichroic beam splitter being out of specifications. The detector is a Photometrics camera equipped with a coated 512<sup>2</sup> Texas Instrument chip. The quantum efficiency is 25% in the UV and 65% in the orange domain. A viewer camera, equipped with is a COHU CCD, allowed us to display the field in order to point the telescope and the siderostat in order to set the LGS close to the NGS at the center of the field. This viewer was fed by moving a flat in the beam in front of it before the telescope focus. Video images have been digitized to measure the Fried's parameter  $r_0$ . For this purpose a 2-hole mask was installed from time to time on the telescope primary mirror. We observed one image per subaperture by defocusing the telescope. Measurements of the covariance of the tilt differences between the two sub-pupils lead to  $r_0$ <sup>18</sup>.  $r_0$  measurements in both directions should be identical within the range of error bars. However due to the 20 ms exposure time, tilts for the two subpupils are correlated along the (unknown) wind velocity direction<sup>19</sup>. This leads to an overestimation of the  $r_0$  measurements. From this method, we derived the upper limit:  $r_0 \approx 8\text{ cm}$ . This differential measurement of  $r_0$  is free from bias due to telescope vibrations which may be important<sup>20,21</sup>, and which cannot be measured by a PLGS. From the spectrum of the movement of the centres of gravity of a single component, we derive another estimate of  $r_0$  5.2 cm, which is free from any wind

effect. A Wiener filter has been applied to this spectrum to correct it for the contribution of the telescope jitter. The 5.2 cm measurement is a lower limit, since jitter may have not been completely removed. Hence, we estimate that a typical value of  $r_0$  was  $\approx 6 \pm 1$  cm, which results in spot area in the mesosphere  $\approx 1 \text{ m}^2$ . Actually in our previous experiments in '94, the spot was larger, about 2-3 meters.

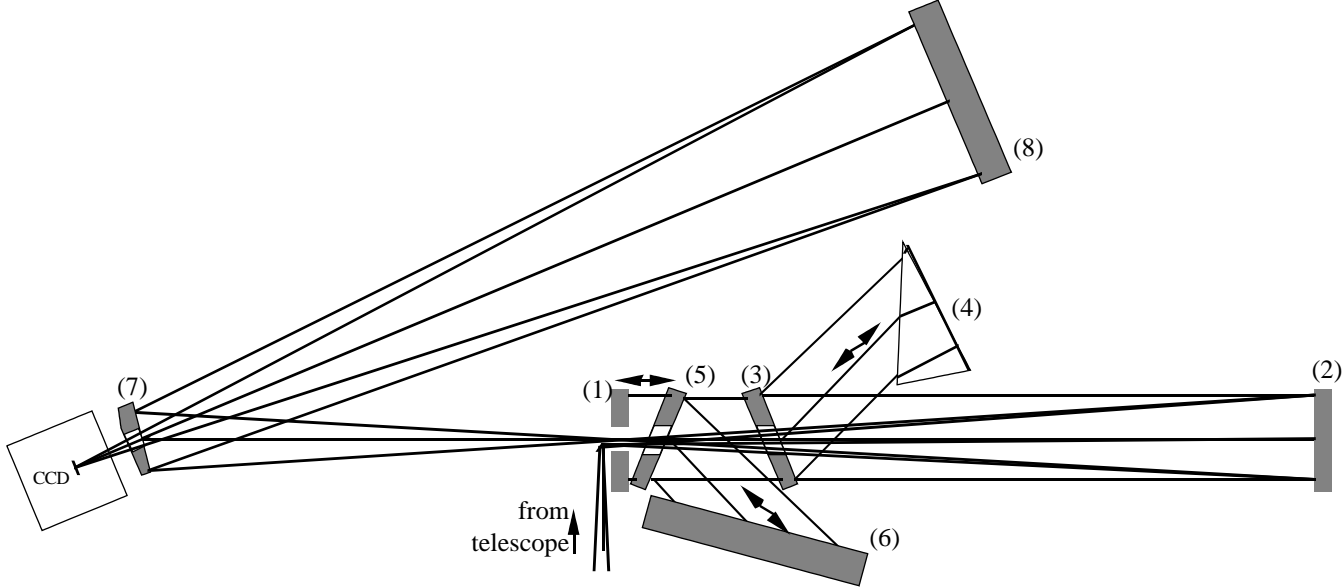


Fig. 1. Optical layout of the PASS instrument. From the telescope Cassegrain focus, the beam crosses through holes corresponding to the telescope central obscuration the flat (1) and the two tilted dichroic beam splitters (5) and (3) to hit the spherical mirror (2). Then the beam is collimated. The ultraviolet wavelengths are reflected by the beam splitter (3) and cross the quartz prism aluminium coated on its back face; it is reflected again by (3) and focused by (2). The beam then is folded with the flat (7), and the UV spectrum of the field, dispersed by the prism (4), is projected onto the CCD camera by the spherical mirror (8). The yellow-orange range follows the same scheme, with the exception that it crosses the UV dichroic beam splitter (3) and it is reflected by the yellow-orange dichroic beam splitter (5), and dispersed by the chelle grating (6); both wavelengths  $D_1$  and  $D_2$  are enough separated so that a spatial filter rejects the  $D_2$  component, which is very bright because of the direct fluorescence from the  $3P_{3/2}$  level. Finally the light of the collimated beam which is neither ultraviolet nor yellow-orange crosses the two beam splitters, is reflected by the flat (1) and is focused by the spherical mirror (2); the non-dispersed image of the field in these complementary colours is focused again onto the CCD camera.

The copper vapor AVLIS laser<sup>22</sup> has been used to deliver a total output average power of  $\approx 350 \text{ W}$  ( $\approx 280 \text{ W}$  at the mesosphere). It has pumped a single Rh6G dye laser amplifier for both wavelengths at 589 nm ( $3S_{1/2} - 3P_{3/2}$ )  $D_2$  transition and at 569 nm ( $3P_{3/2} - 4D_{5/2}$ ). A modulator broadened the 569 nm channel to span the 1 GHz wide Doppler profile of mesospheric sodium atoms. Another modulator widened the  $D_2$  wavelength to 1 or 3 GHz to span either only the strongest line or both lines due to the hyperfine structure of the fundamental state (1.77 GHz). Both laser beams were linearly polarized, with parallel polarization vectors. The wavefront surface errors over the  $8 \times 4 \text{ cm}^2$  beams was typically  $\lambda/20$ . With the above mentioned value of  $r_0$ , it comes that the laser spot in the mesosphere was close to the diffraction limit, with most of the energy encircled in a single speckle.

The two laser beams were directed to the sky through a siderostat allowing us to have to locate the LGS as close as required to any star. Figure 2 shows a typical image which we observed. The UV and yellow ranges of the spectrum of the star SAO 60855, as well as the non-dispersed image of the field in complementary colours are shown. The 330 nm ( $4P_{3/2} - 3S_{1/2}$ ) and the  $D_1$  ( $3P_{1/2} - 3S_{1/2}$ ) images of the PLGS are observed. These lines that originate from the fluorescence cascade confirm that the two laser beams populate the  $4D_{5/2}$  level of mesospheric sodium. The light between the two stellar spectra is caused by ghosts of the grating which scatters light from the very powerful Rayleigh backscattering in the spatially filtered  $D_2$  line.

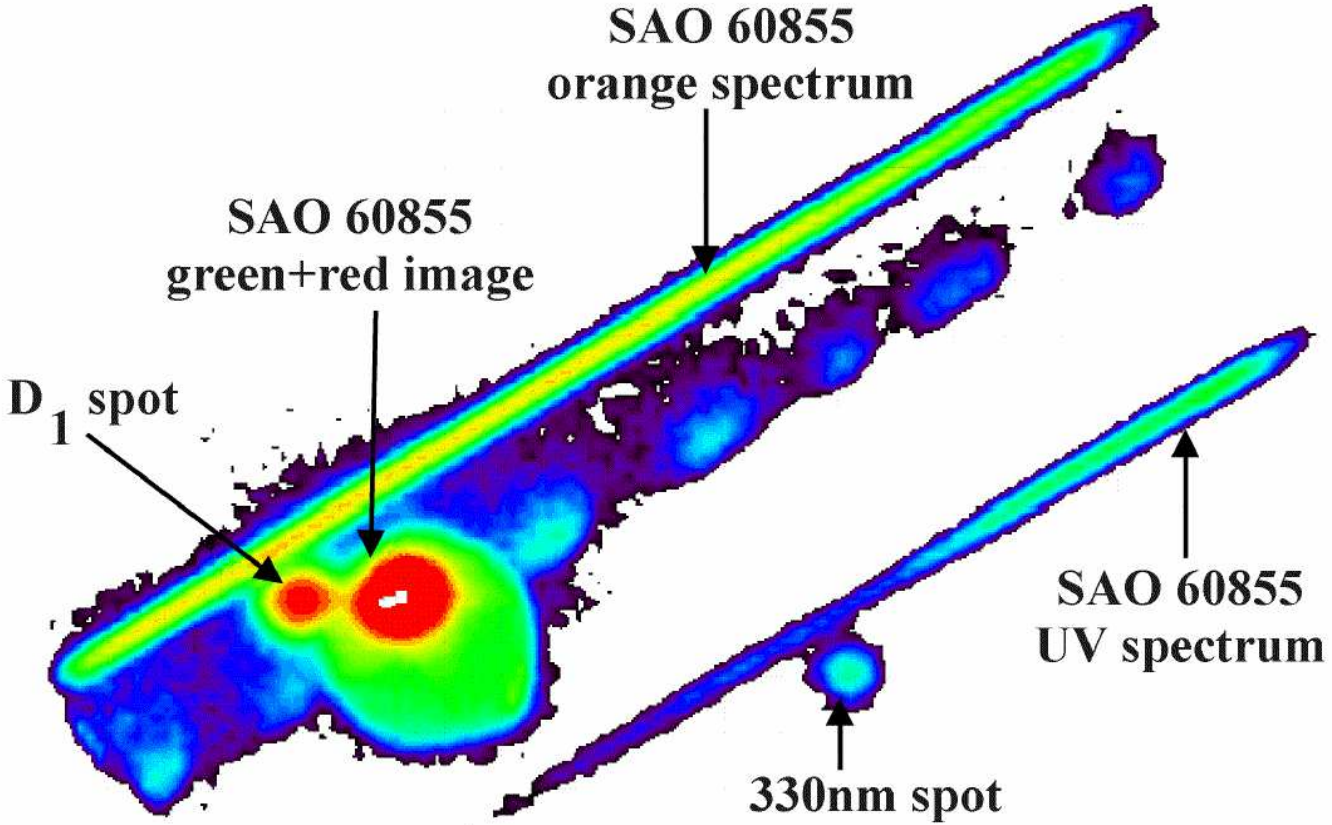


Fig. 2. Image of the 330 nm and  $D_1$  spots with the spectrum of the reference star SAO 60855 in the yellow and ultraviolet ranges. The saturated image of the field in other colours is in the central area; its diameter is  $40''$ . The light between the two stellar spectra is due to grating ghosts lit by the very bright Rayleigh beam at the wavelength of the  $D_2$  line, of which the very top is barely visible at the bottom right of the field image.

Exposures were 1 to 20 second long, because of the comparatively low sensitivity of the detector. We had no device to measure the phase and the amplitude of the telescope vibrations simultaneously with the PLGS observations. Because of both these reasons, we did not attempt to carry out observations in view of tilt measurements.

Images have been processed in a standard way. Flat field and dark current exposures were recorded at the time of the observations to derive calibrated photometric measurements. Then dark current has been subtracted and fluxes in analog-to-digital units (ADUs) have been normalized using the flat field exposures. Particular attention has been paid to the light pollution caused by the  $D_2$  Rayleigh scattering around the 330 nm image. Finally the value of 5.62 photons/ADU provided by Photometrics has been used to derive the photon fluxes. The numbers of photons in unit of  $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$  are corrected for the quantum efficiency of the whole equipment, and for the atmospheric transmission, which has been evaluated to be 0.3 at 330 nm from the flux of SAO 60855 measured at 360 nm (because it is close to the center of the U spectral bandwidth and because the U magnitude of SAO 60855 is known); correction to the transmission at 360 nm for the other wavelengths  $\lambda$  have been done using the variations with  $\lambda$  of the atmosphere absorption<sup>23</sup>. A Na and a HgCd spectral lamps have been used for the purpose of wavelength calibration of the UV spectrum. These lamps were installed in a simulation telescope; the instrument was fed with the spectral lamp light from this simulation telescope by moving a mirror in the beam from the main telescope before the focal plane. Variations of the atmospheric transmission from sequence to sequence have been corrected by normalizing the fluxes with the ratio of the fluxes in the integrated UV stellar spectrum to its maximum value. The numbers of photons are given in unit of  $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$  assuming an optical and detector quantum efficiency of 1, and no atmosphere absorption.

We have investigated the effect on the returned flux at 330 nm of parameters of the laser configuration, as follows :

- the spectral width of the modulated  $D_2$  laser emission was either 1 or 3 GHz,

- the repetition rate was either 4.3 or 12.9 kHz, with constant average power,
- the central frequency of the 330 nm emission was scanned from  $-0.6$  GHz to  $+0.6$  GHz, by 0.3 GHz steps,
- the ratio of the power in the 589 nm laser beam to the total power (569 nm + 589 nm) was set to 30%, 50% and 70%, and
- the total output average power ranged from  $\approx 320$  to  $\approx 400$  W.

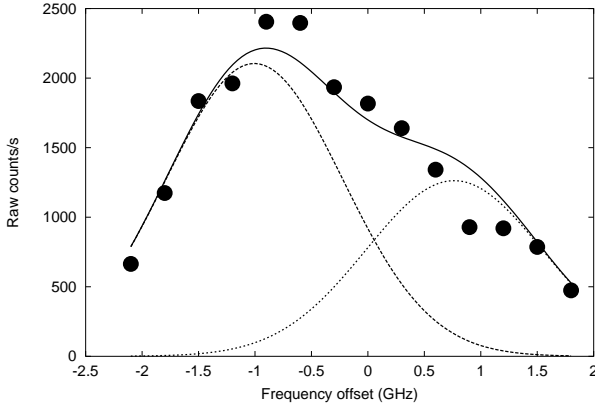


Fig. 3. Returned flux in the  $D_2$  line from the mesosphere (raw counts per second) as a function of the frequency of the emitted beam at 589 nm (in GHz). Crosses: observations; solid line: fit with the sum of two Gaussians (dotted lines).

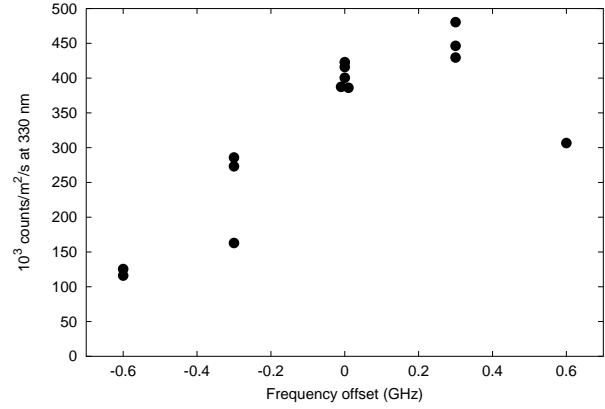


Fig. 4. Returned flux per second at 330 nm as a function of the frequency of the emitted beam at 569 nm (in GHz).

In addition the central frequency of the  $D_2$  laser beam was scanned to maximize the returned resonant flux from  $-2.1$  GHz to  $+1.8$  GHz, by 0.3 GHz steps (Fig. 3). The output average power was 260 W and the pulse repetition rate 12.9 kHz. We have fitted the data with the sum of two Gaussians with i/ a FWHM convolved with the 1 GHz width of the modulator profile, assuming it is gaussian (which is likely a crude assumption), ii/ a central intensity ratio of 5 : 3 (we note that the intensity appears to be larger on Fig 3 possibly due to the optical pumping from the energy sublevels  $F = 1$  to  $F = 2^{24,25}$ ) and iii/ a separation of 1.77 GHz, both corresponding to that of the  $D_2$  hyperfine structure; free parameters have been the central wavelength, the total intensity, and the width of the lines, assuming a gaussian profile. The resulting fit is displayed in Fig. 3. We derive that the  $D_2$  transition is saturated since the line FWHM is  $\approx 1.25$  GHz larger than the Doppler width of  $\approx 1$  GHz. From the laser power per surface unit expected from the  $r_0$  measurement (assuming an uniform intensity distribution), we derive the peak intensity  $260/6.45 \cdot 10^{-4} \approx 400$  kW/m<sup>2</sup> with the duty cycle  $50 \text{ ns} \times 12.9 \text{ kHz} \approx 6.45 \cdot 10^{-4}$ . This value is much larger than the typical saturation intensity  $I_S$

$$I_S = \frac{h\nu}{\sigma\tau} \frac{\Delta\nu_T}{\Delta\nu_h} \approx 55 \text{ kW/m}^2 \quad (2)$$

where  $h$  is the Planck constant,  $\nu$  the frequency of the transition,  $\sigma = 1.14 \times 10^{-9} \text{ cm}^2$  its cross-section,  $\tau = 16 \text{ ns}$  its lifetime,  $\Delta\nu_h = 10 \text{ MHz}$  its homogeneous width and  $\Delta\nu_T \approx 3 \text{ GHz}$  its total width, including the hyperfine structure. The peak intensity would lead to a FWHM  $\approx (4 \cdot 10^5 / 55 \cdot 10^3)^{1/2} \approx 2.6$  times larger than the FWHM of the unsaturated line. This saturation factor higher than the observed one could result from the assumptions of an uniform illumination and of a gaussian profile of the modulator.

The variation of the 330 nm flux with the 589 nm to total laser average power ratio shows a peak close to 0.5 (Fig. 5).

The average power in the 4.3 kHz 589 nm beam at the mesosphere was  $\approx 280$  W and  $\approx 290$  W for the observations at 1 GHz and 3 GHz respectively. The 330 nm returned flux at  $F_{569}/(F_{569} + F_{589}) \approx 0.5$  is  $\approx 1.55$  times at 3 GHz

than at 1 GHz; this is consistent with the excitation of 60% more sodium atoms which populate the lowest component of the ground level hyperfine structure with the  $D_2$  transition at saturation.

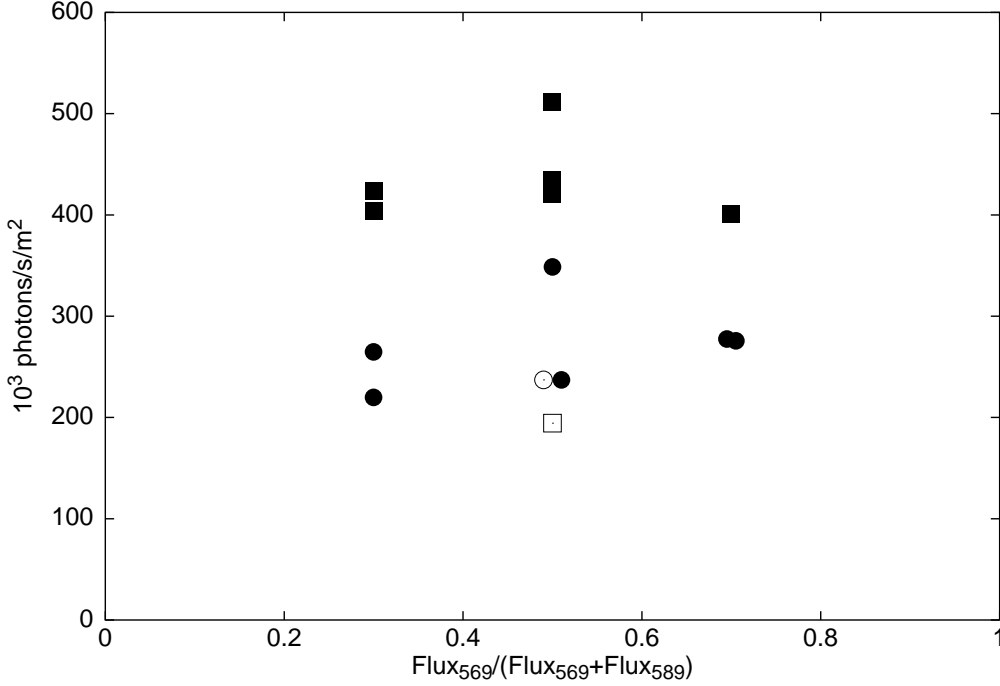


Fig. 5. Returned flux at 330nm as a function of the power balance between the two beams at 589nm and at 569nm. Circles: modulator width at  $D_2 = 1$  GHz. Squares: modulator width at  $D_2 = 3$  GHz. Filled symbols: rep rate = 4.3 kHz; open symbols: rep rate = 12.9 kHz

Figure 5 shows also that decreasing the rep rate from 12.9 kHz down to 4.3 kHz increases the returned flux at 330 nm by a factor of  $\approx 1.9$ . Far from the saturation of the two-photon transition, the population of the  $4D_{5/2}$  level, and consequently the returned flux at 330 nm, is proportional to the product of the peak powers at 569 nm and 589 nm times the repetition rate. Because at constant average power, the peak power increases when the repetition rate decreases, one would expect to have a returned flux 3 times larger at 4.3 kHz. However this ratio should decrease when approaching saturation. This is confirmed by computing the population of the  $4D_{5/2}$  energy level from the kinetics equations for the two rep rates 12.9 kHz and 4.3 kHz.

Far above saturation, the returned flux is proportional to the repetition rate. A reasonable interpretation of the observed increase of the 330 nm flux at 4.3 kHz is that the coherent two-photon absorption significantly contributes to the population of the  $4D_{5/2}$  level<sup>26</sup>.

The 569 nm line was scanned also. Figure 4 shows the variation of the 330 nm flux as a function of the central frequency of the 569 nm laser beam. The maximum value of the flux returned in the 330 nm spot is  $\approx 4.8 \cdot 10^5$  photons/m<sup>2</sup>/s. It has to be compared with the predicted number of photons required to correct the tilt (see Table 2 in Foy et al.<sup>2</sup>). We use the assumptions: optics and detector efficiency of 0.26, atmospheric transmission of 0.6 at 330 nm,  $r_0 = 15$  cm, telescope diameter 1 m. It is also assumed that the only source of noise is photon noise; the bandwidth error is not included. Taking into account Eq. 1 with the maximum wavelength basis 330 nm-2.3  $\mu$ m, the number of photons required per coherence time unit is  $\approx 1.6 \cdot 10^4$  for a correction at  $\lambda_c = 0.9 \mu$ m; this is 30 times smaller than the observed flux. Thus as long as the tilt coherence time is shorter than  $\approx 30$  ms, the tilt can be measured down to 0.9  $\mu$ m with a rms error equal to half the Airy disk. Here we do not assume that AO is used to improve the point spread function of the LGS images. If no other errors are present, the tilt Strehl ratio,  $S_{tilt}$ , of an image depends on the error in the tilt measurement (angle of arrival),  $\sigma_{tilt}^2$  as<sup>27</sup>

$$S_{tilt} = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{2} \sigma_{tilt}^2 \left( \frac{D}{\lambda_c} \right)^2}, \quad (3)$$

where  $D$  is the telescope diameter. Then at small values of  $S_{tilt}$ , the above mentioned limiting wavelength  $\lambda_c$  varies as the telescope diameter. In the limit of  $S_{tilt}$  going to 1, it becomes insensitive to  $D$ . A detailed model is now in preparation.

There are several ways to improve the efficiency of the process of populating the  $4D_{5/2}$  energy level.

- adjusting the repetition rate enhances the average two-photon excitation.
- using circularly polarized laser beams increases the cross section by a factor of  $\approx 1.2 - 1.5$ , depending on the pulse format;
- if one can operate the lasers in conditions where one can take full advantage of the coherent two-photon resonant absorption, then other possibilities to increase it are open: excitation over very few modes, even of a single mode, and shooting through an adaptive optics with an emitter aperture as large as possible to form a diffraction limited spot in the mesosphere.
- lasers working at much higher pulse repetition rate, and consequently lower peak power, or even cw lasers, would avoid the saturation of the absorption. Thus the return flux should be significantly increased with respect to the experiment which is reported here.

The gain from the two first items could be improved by another factor of possibly 10 if the coherent absorption fully works; other non-linear processes, as fast adiabatic passages from the  $3S_{1/2}$  to the  $3P_{3/2}$  levels and then from the  $3P_{3/2}$  to the  $4D_{5/2}$  levels may also be excited<sup>28,29</sup>. It is crucial now to investigate these excitation processes in order to be able to further decrease the laser power required at an astronomical site. This requires the development of an end-to-end model to quantitatively study in detail the dependence of the LGS performances in terms of Strehl ratio as a function of the atmospheric and instrumental parameters and of the wavelength of the correction. This will be described in a forthcoming paper. This work is running now within the framework of the *Etoile Laser Polychromatique pour Optique Adaptative* French programme<sup>30</sup> which aims at demonstrating that the laser power can be decreased down to  $\approx 2 \times 25$  W. This average power seems still acceptable at an astronomical site.

- 
1. R. Foy and A. Labeyrie, "Feasibility of adaptive telescope with laser probe," *AA* **152**, L29–32 (1985).
  2. R. Foy, A. Migus, F. Biraben, G. Grynberg, P. R. McCullough, and M. Tallon, "The polychromatic artificial sodium star: a new concept for correcting the atmospheric tilt," *AASup* **111**, 569–578 (1995).
  3. C. A. Primmerman, D. V. Murphy, D. A. Page, B. G. Zollars, and H. T. Barclay, "Compensation of atmospheric optical distortions using a synthetic beacon," *Nature* **353**, 141–143 (1991).
  4. R. Q. Fugate *et al.*, "Two generations of laser-guide-star adaptive-optics experiments at the Starfire Optical Range," *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 310–324 (1994).
  5. H. W. Friedman, G. Erbert, T. Kuklo, T. Salmon, D. Smauley, G. Thompson, J. Malik, N. Wong, K. Kanz, and K. Neeb, "Sodium beacon laser system for the Lick Observatory," In *Adaptive optics*, R. K. Tyson and R. Q. Fugate, eds., SPIE **2534**, 150–160 (1995).
  6. R. Davies, Hackenberg, Ott, A. E. C. Holstenberg, S. Rabien, A. Quirrenbach, and Kasper, "ALFA: First operational experience of the MPE/MPIA laser guide star system for adaptive optics," In *Adaptive Optical System Technologies*, D. Bonaccini and R. K. Tyson, eds., Proc. SPIE **3353**, 116–124 (1998).
  7. J. Pilkington, "Artificial guide stars for adaptive imaging," *Nature* **330**, 116 (1987).
  8. M. Séchaud, N. Hubin, L. Brixon, R. Jalin, R. Foy, and M. Tallon, "Laser Backscattered Reference Star for Atmospheric Wavefront Disturbances Measurement," In *Very Large Telescopes and their Instrumentation*, U. M.-H., ed., ESO/NOAO Conferences pp. 705–714 (Garching, Germany, 1988).
  9. R. Q. Fugate, "Observations of faint objects with laser beacon adaptive optics," In *Adaptive Optics in Astronomy*, M. A. Ealey and F. Merkle, eds., Proc. SPIE **2201**, 10–21 (1994).

10. S. Hippler, M. Kasper, M. Feldt, R. Weiss, W. K. Hackenberg, and T. Ott, "ALFA: three years of experience in adaptive optics with a laser guide star," In *Adaptive Optical Systems Technology*, Proc. SPIE **4007**, 41–49 (2000).
11. F. Rigaut and E. Gendron, "Laser guide star in adaptive optics: the tilt determination problem," *Astron. Astrophys.* **261**, 677–684 (1992).
12. M. Le Louarn, R. Foy, N. Hubin, and M. Tallon, "Laser guide star for 3.6m and 8m telescopes: Performances and astrophysical implications," *Mon. Not. R. astron. Soc* **295**, 756–768 (1998).
13. R. Foy, Y. Boucher, B. Fleury, G. Grynberg, P. R. McCullough, A. Migus, and M. Tallon, "ATLAS status report and tilt sensing using multicolour laser reference star," In *Progress in telescope and instrumentation technologies*, U. M.-H., ed., ESO conferences pp. 437–441 (Garching, Germany, 1992).
14. R. Ragazzoni, S. Esposito, and E. Marchetti, "Auxiliary telescopes for the absolute tip-tilt determination of a laser guide star," *Mon. Not. R. astron. Soc* **276**, L76–78 (1995).
15. M. S. Belen'kii, "Full aperture measurement technique with a laser guide star," In *Atmospheric propagation and remote sensing. IV*, C. Dainty, ed., Proc. SPIE **2471**, 289–300 (1995).
16. R. Ragazzoni, "Absolute tip-tilt determination with laser beacons," *Astron. Astrophys.* **305**, L13–16 (1996).
17. R. Ragazzoni, "Propagation delay of a laser beacon as a tool to retrieve absolute tilt measurements," *Astrophys. J.* **465**, L73 (1996).
18. F. Roddier and M. Sarazin, "The ESO differential image motion monitor," *Astron. Astrophys.* **270**, 294–300 (1990).
19. H. M. Martin, "Image motion as a measurement of seeing quality," *Pub. Astron. Soc. Pacific* **99**, 1360–1376 (1987).
20. I. Belkine, Ph.D. thesis, Université Claude Bernard Lyon-1, Villeurbanne, France, 1996.
21. R. Foy, I. Belkine, and E. Thiébaud, "Pre-main sequence stars by visible speckle interferometry at the CFHT and telescope/instrument constraints," In *Proc. of the Canada-France-Hawaii-Telescope Users's meeting*, M. Azzopardi, ed., 4 pp. 119–123 (CFHT, Waimea, Hawaii, 1995).
22. C. E. Max *et al.*, "Design, layout, and early results of a feasibility experiment for sodium-layer laser-guide-star adaptive optics," *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 813–824 (1994).
23. C. W. Allen, *Astrophysical Quantities* (The Athlone Press, University of London, 1976).
24. T. H. Jeys, R. M. Heinrichs, K. F. Wall, J. Korn, T. C. Hotaling, and E. Kibblewhite, "Observation of optical pumping of mesospheric sodium," *Optics L.* **17**, 1143–1145 (1992).
25. B. P. Jacobsen, T. Martinez, J. R. P. Angel, M. Lloyd-Hart, S. Benda, D. Middleton, H. W. Friedman, and G. V. Erbert, "Field evaluation of two new continuous-wave dye laser systems optimized for sodium beacon excitation," In *Adaptive Optics in Astronomy*, M. A. Ealey and F. Merkle, eds., Proc. SPIE **2201**, 342–351 (1994).
26. G. Grynberg, B. Cagnac, and F. Biraben, *Coherent non-Linear Optics* (Springer-Verlag, Berlin, 1980).
27. D. G. Sandler, S. Stahl, J. Angel, M. Lloyd-Hart, and D. McCarthy, "Adaptive optics for diffraction-limited infrared imaging with 8-m telescopes," *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 925–945 (1994).
28. G. Grynberg, "Atomic physics and multicolor laser guide star," In *Laser technology for laser guide star adaptive optics astronomy*, H. N., ed., ESO Workshops pp. 71–76 (Garching, Germany, 1997).
29. C. Gastineau, Ph.D. thesis, Université Paris-XII, Orsay, France, 1995.
30. R. Foy *et al.*, "PASS-2: Quantitative photometric measurements of the polychromatic laser guide star," In *Adaptive Optical Systems Technology*, Proc. SPIE 4007 (2000).

We wish to thank for their collaboration A. Baranne, B. Buzzoni, the staff of Observatoire de Lyon, and particularly M. Chatagnat, and the staff of the LLNL. We are indebted to the USEC Corp. for having given us access to the AVLIS laser. We thank also SYLAREC and Aérospatiale companies, CEA (DCC) and CNRS (ULTIMATECH programme and INSU), for funding this experiment, and Mr. Pilloud for loaning the échelle grating of the PASS instrument.





---

## Mesure du tilt atmosphérique à partir de sa variation chromatique pour l'étoile laser polychromatique

---

### Résumé :

L'utilisation de grands télescopes rend de plus en plus nécessaire l'emploi de l'optique adaptative qui permet de corriger l'effet de la turbulence atmosphérique. Toutefois cette technique est limitée par le nombre de sources de référence. L'étoile laser permet de pallier ce manque en créant artificiellement une source lumineuse, que l'on peut placer à volonté sur la voûte céleste, au-dessus des couches turbulentes. Or, par cette technique, on ne mesure que les déformations des images mais pas leur déplacement qui est pourtant l'effet le plus important. L'étoile laser polychromatique propose de le corriger également, à partir de la différence chromatique du tilt atmosphérique.

Cette mesure différentielle nécessite une grande précision et sa faisabilité n'avait pas encore été démontrée. Pour cela, j'ai conçu et réalisé une expérience dénommée MaTiID (Manipulation de Tilt Différentiel). Le signal à mesurer étant très faible, j'ai développé deux traitements distincts : *i*) l'estimation des angles d'arrivée par mesure du centre de gravité des images, *ii*) l'estimation du tilt de la surface d'onde par ajustement d'un modèle sur les images. Le premier traitement m'a permis de mettre en évidence l'existence du chromatisme du tilt. Mais la précision obtenue est inférieure à ce que prédit l'étude théorique que j'en ai faite. Le but du second algorithme est donc d'améliorer cette précision en s'affranchissant d'une partie des limitations de la mesure du centre de gravité : fenêtrage, chevauchement des images, sensibilité élevée au bruit, ... On est alors dans le cadre général de la minimisation de fonctions non-linéaires dans un espace multidimensionnel (typiquement plusieurs dizaines de paramètres). J'ai contribué au développement et aux tests d'une méthode permettant de réduire significativement le nombre de dimensions de cet espace.

---

## Measurement of the atmospheric tilt from its chromatic variation for the polychromatic laser guide star

---

### Abstract :

The use of large telescope increases the need of adaptive optics, which correct atmospheric turbulence effects. However, this method is limited by the finite number of reference sources. The laser guide star solution create an artificial reference source, anywhere on the sky, above the turbulence layers. But, only the spread of the image can be corrected and not its motion, which is the most important effect. The polychromatic laser guide star allow to correct also this displacement by measuring the chromatic difference of the atmospheric tilt.

This differential measurement requires a high accuracy and its feasibility has never been demonstrated. That is why I have designed and realized an experiment, called MaTiID (Manipulation de Tilt Différentiel). And because the measured signal is weak, I have developed two different processings : *i*) the estimation of the angle of arrival by computing the center of gravity of images, *ii*) the estimation of the tilt of the wavefront by fitting a model on the images. The chromatism of the tilt has been shown by using the first processing. However, the achieved precision is less than the one I have theoretically predicted. The objective of the second algorithm is to improve the accuracy by overcoming some limitations of the center of gravity method : windowing, image overlapping, high sensitivity to noise,... This method is based on the minimization of a non-linear function in a multidimensional space (typically more than ten parameters). I have contributed to the development and the tests of a new method than reduces significantly the number of dimensions of the minimization space.

---

**Discipline :** Astrophysique

---

**Mots Clés :** Étoile laser, indétermination du tilt, traitement d'image, reconstruction de surface d'onde.

---